РЕФЕРАТ

наукової роботи

 **«Задачі стабілізації та керування рухом для багатовимірних динамічних систем з некерованим лінійним наближенням»**

наукового співробітника Інституту прикладної математики і механіки

НАН України, кандидата фізико-математичних наук В.В. Грушковської

**Актуальність дослідження**

Дану роботу присвячено фундаментальній задачі математичної теорії керування, яка полягає у розробці ефективних керуючих алгоритмів для стабілізації та планування руху багатовимірних динамічних систем, що описуються суттєво нелінійними диференціальними рівняннями. Відмітною властивістю досліджуваних систем є те, що для них не виконано умови стійкості та керованості за лінійним наближенням, що суттєво ускладнює застосування відомих математичних методів.

Зазначені системи керування знаходять чисельні застосування у різних областях інженерії. Протягом останніх декількох десятиріч, чимала увага приділяється задачі планування руху лінійних за керуванням неголономних систем. Щоб підкреслити важливість цього класу систем зауважимо, що властивість неголономності почала активно використовуватися в світовій літературі з планування руху роботів починаючи з задачі автономного паркування автомобіля, яка не вирішувалась тодішніми навігаційними системами. Відомо, що неголономні системи характеризуються в’язами, які містять похідні за часом від фазових змінних системи. Такі системи не є інтегровними і зазвичай виникають, коли математична модель має більш фазових змінних, ніж керувань. Як наслідок, довільна траєкторія у конфігураційному просторі не обов’язково відповідає припустимій траєкторії системи. Тому суто геометричні методи, розроблені для планування руху голономних систем, не можуть бути безпосередньо застосовані до неголономних. Інтерес до таких систем пов’язаний як з їх унікальними аналітичними властивостями, так і зі значимістю цієї проблеми у сфері робототехніки, оскільки такі системи описують рух багатьох важливих класів механічних систем, наприклад мобільних колісних роботів, роботизованих маніпуляторів, автопоїздів, автономних підводних та повітряних апаратів. Незважаючи на значну кількість досліджень в області планування руху (роботи R.W. Brockett, I. Duleba, J.P. Gauthier, L. Gurvits, B. Jakubczyk, F. Jean, R.M. Murray, Z. Li, W. Liu, S.S. Sastry, H.J. Sussmann, V. Zakalyukin, О.В. Карапетяна, О.С. Кулешова, В.Б. Ларіна, Ю.Л. Сачкова, О.М. Формальського та ін.), не втрачає своєї актуальності проблема синтезу законів керування для загальних класів систем, а розробка нових підходів до цієї проблеми привертає значний інтерес як з теоретичної, так і з практичної точок зору. Це пов’язано з тим, що існуючі методи або розроблені лише для конкретних класів систем, або носять суто теоретичний характер. Низка підходів використовує оптимальні керування для наближеного відстеження траєкторій, але вони також застосовні лише для деяких класів неголономних систем. Інші алгоритми або не мають математичного доведення збіжності, або не є ефективними для практики та чисельної реалізації.

Також до класу досліджуваних систем відносяться суттєво нелінійні системи диференціальних рівнянь у критичних випадках, тобто системи, для яких задачу стійкості не можна розв’язати у термінах лінійного наближення. Практичний інтерес до таких систем зумовлено їх поширеністю у фізичних та механічних системах. Зокрема, стійкість руху в небесній механіці зазвичай досягається лише у критичних випадках. Інший важливий клас суттєво нелінійних систем представлено різноманітними осцилюючими системами, від простих маятникових та роторних механізмів до супутникових комплексів. Теорія критичних випадків веде початок від фундаментальної дисертаційної роботи О. М. Ляпунова і набула подальшого розвитку в роботах В.Г. Веретеннікова, Я. Гольтцера, Г.В. Каменкова, А.Л. Куніцина, І.Г. Малкіна, А.А. Мартинюка, С.В. Медведєва, А.М. Молчанова, О.С. Озіранера, К.П. Персидського, Л. Сальвадорі, В.I. Слинька, В.М. Тхая, М.Г. Четаєва, Г.О. Ярошевича, E.H. Abed, A. Devinatz, J.-H. Fu, A. Steindl, H. Troger та ін. Відмітною властивістю систем у критичних випадках є те, що на відміну від лінійних систем, для яких асимптотична стійкість еквівалентна експоненціальній, розв’язки суттєво нелінійних систем задовольняють степеневій оцінці. Цей факт було доведено для однорідних систем в роботах В.І. Зубова, М.М. Красовського, О.О. Шестакова, а також для критичного випадку пари суто уявних власних значень у роботах К. Пайффера, О.Я. Савченка та інших. У випадку довільного числа суто уявних власних значень асимптотичні нерівності отримані О.Л. Зуєвим для норми розв’язків модельної системи. У той же час, відкритими залишаються питання про конструктивну оцінку розв’язків системи з нейтральною і стійкою компонентами, а також про побудову функції Ляпунова у явному вигляді. У цьому напрямку особливе місце займає вивчення систем, частоти яких пов’язано резонансними співвідношеннями, оскільки наявність резонансів суттєво впливає на стійкість розв'язків системи та швидкість їх згасання. Зокрема, існує чимало прикладів, коли наявність резонансних частот призводила як до руйнівних, так і до стабілізуючих ефектів. Важливою прикладною задачею, що може бути розв’язана із урахуванням асимптотичних властивостей траєкторій суттєво нелінійних систем, є задача оптимальної стабілізації систем з некерованим лінійним наближенням. Відмітимо, що одним з основних підходів до вивчення задачі оптимальної стабілізації нелінійних керованих систем є метод динамічного програмування Р. Беллмана. Однак побудова функції Беллмана для загальних класів нелінійних систем пов'язана з істотними труднощами, тому пошук ефективних методів синтезу функцій зворотного зв'язку становить важливу задачу сучасної теорії керування рухом. У поданій роботі розвинуто інший метод дослідження мінімаксних проблем оптимальної стабілізації, що ґрунтується на методі розділення рухів А.М. Молчанова та ідейно перекликається з асимптотичними методами теорії нелінійних коливань М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка.

На відміну від прийнятого підходу до дослідження стійкості руху нелінійних механічних систем, що ґрунтується на прямому методі Ляпунова, у недавній час виник новий науковий напрям, який використовує більш широке поняття притягання траєкторій майже всюди. A. Рантцер запропонував підхід до дослідження притягальних множин у термінах функції щільності. Функції щільності можуть бути побудовані за відомими функціями Ляпунова, проте відомі приклади свідчать, що метод A. Рантцера застосовний також у випадках, коли функцію Ляпунова важко знайти. Розвиваючи підхід А. Рантцера, у низці робіт сучасних авторів запропоновано результати, що можуть бути застосовані до дослідження асимптотичної стійкості. Серед цих авторів можна назвати D. Angeli, A. Jad-babaie, S.G. Loizou, I. Masubuchi, P. Monzon, P.G. Mehta, P.A. Parrilo, S. Prajna, A. Raghunathan, J. Yu, U. Vaidya, J.F. Vasconcelos та інших. Проте, як наголошується в цих роботах, не завжди вдається побудувати функцію щільності з необхідними властивостями. Тому доцільним є, по-перше, розширення класу функцій щільності, та по-друге, поширення підходу А. Рантцера на абстрактні динамічні системи.

 **Основний зміст роботи**

*Головною метою* роботи є розробка ефективних методів синтезу функцій керувань для стабілізації та планування руху багатовимірних механічних систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями. У зв'язку з цим виникає ряд задач, пов'язаних із дослідженням стійкості класів суттєво нелінійних систем та з синтезом функцій зворотного зв'язку.

Однією з таких задач є побудова функцій керування, які забезпечують рух системи із початкового стану до цілі за заданий проміжок часу, тобто розв’язують двоточкову задачу керування. У даній роботі таку задачу досліджено для систем, векторні поля яких задовольняють рангову умову з ітерованими дужками Лі першого та другого порядків. У цих системах кількість керувань є суттєво меншою за кількість фазових змінних, тож до них не застосовні суто геометричні методи, розроблені для планування руху голономних систем, у яких вимірність конфігураційного простору дорівнює вимірності керування. До дослідження таких систем застосовано новий метод дослідження властивостей траєкторій нелінійних систем, в основі якого лежить розкладання розв'язків системи в ряд Вольтерри. Такий метод було запропоновано О.Л. Зуєвим для стабілізації нелінійних систем. У представленій роботі отримано модифікацію зазначеного методу для розв'язання двоточкової задачі керування. У якості функцій керувань використано сім'ю тригонометричних поліномів, коефіцієнти яких визначаються виходячи з початкового та цільового станів системи, а також проміжку часу, за який система повинна досягнути заданої конфігурації. Запропонований підхід дозволяє звести поставлену двоточкову задачу керування до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь на коефіцієнти керувань, що призводить до конструктивної та простої процедури побудови функцій керувань без необхідності використовувати додаткові перетворення, такі як зведення системи до канонічної форми. Розв'язність системи алгебраїчних рівнянь доведено із застосуванням принципу ненульового обертання. Відмітимо, що в результаті виконаного дослідження отримано явні вирази для функцій керування та доведено локальну розв'язність двоточкової задачі керування в класі тригонометричних функцій зворотного зв'язку, що становить суттєвий внесок у математичну теорію керування. Для особливого класу нелінійних систем (так званих нільпотентних систем) запропонований керуючий алгоритм забезпечує точне розв'язання задачі планування руху. У загальному випадку побудовані керування переводять системи у довільно малий окіл заданого стану. Отримані результати застосовано до планування руху декількох важливих класів механічних систем.

Другою задачею роботи є дослідження асимптотичних властивостей траєкторій суттєво нелінійних систем диференціальних рівнянь. Розглянуто клас систем у критичних випадках теорії стійкості руху, тобто вважається, що матриця лінійного наближення системи містить довільну кількість суто уявних власних значень, а також власні значення з від’ємними дійсними частинами. Розв’язання цієї задачі пов'язано з отриманням оцінок норми розв’язків, а також з побудовою функції Ляпунова у явному вигляді, за умови, що на стійкість системи не впливають члени вище третього порядку. За допомогою принципу зведення та методу нормальних форм, у роботі отримано конструктивний підхід до опису асимптотичної поведінки траєкторій системи з нейтральною та стійкою компонентами, за допомогою якого доведено степеневу оцінку норми розв'язків та отримано явні вирази коефіцієнтів такої оцінки. Окремо досліджено випадок наявності в системі внутрішніх резонансів четвертого порядку, для якого також досліджено швидкість згасання розв'язків системи та отримано нові достатні умови асимптотичної стійкості. Крім того, побудовано декілька класів функцій Ляпунова. Отримані результати застосовано для оцінки швидкості згасання коливань декількох механічних систем з частковою дисипацією і розв’язання проблеми оптимальної стабілізації з функціоналом, що визначає граничну поведінку розв’язків на нескінченності.

Також у роботі розглянуто задачу опису атракторів абстрактних динамічних систем з монотонною мірою. У цьому напрямку основним результатом є достатні умови, за яких інваріантна множина є притягальною при майже всіх початкових умовах. Крім того, з використанням функцій щільності досліджено властивість притягання майже всюди для розв’язків системи нелінійних диференціальних рівнянь. Отримані результати поширюють підхід А. Рантцера на абстрактні динамічні системи та дозволяють використовувати функції щільності з більш загальними властивостями. У якості одного з можливих напрямків використання отриманих результатів досліджено задачу стабілізації обертального руху твердого тіла в термінах кватерніонів.

Ще одну задачу становить одержання необхідних умов стабілізовності нелінійних систем з обмеженнями на керування. Оскільки властивість асимптотичної стійкості не залежить від способу задання координат у околі стану рівноваги, природньо шукати умови стабілізовності системи у термінах її інваріантів відносно перетворень зі зворотних зв’язком. У даній роботі такі умови запропоновано для класу систем з декількома критичними гамільтоніанами. За допомогою отриманих результатів розв'язано задачу стабілізації стану рівноваги рівнянь Ейлера з обмеженням на значення керуючого моменту.

**Основні результати роботи та обґрунтування їх наукової новизни**

Новизна роботи полягає у застосуванні авторського підходу до синтезу керуючих функцій для низки задач стабілізації та планування руху, а також до дослідження властивостей стійкості та асимптотичної поведінки розв'язків багатовимірних динамічних систем.

Перерахуємо основні результати, отримані в роботі, та положення, що визначають їх новизну у порівнянні з відомими результатами:

1. Запропоновано новий конструктивний метод синтезу функцій керувань, що розв’язують двоточкову задачу керування для класу лінійних за керуванням систем, у яких кількість фазових змінних значно перебільшує кількість керувань. На відміну від відомих результатів у теорії планування руху неголономних систем (зокрема, робіт L.G. Bushnell, J. Canny, P. Hsu, Z.X. Li, R.M. Murray, S.S. Sastry, D.M. Tilbury), запропонований підхід може бути застосовано до досить загального класу неголономних систем. Крім того, він не потребує ніяких додаткових перетворень координат (наприклад, приведення системи до канонічного вигляду), що значно полегшує розв'язання задачі та реалізацію керуючого алгоритму.

2. З використанням рядів Вольтерри та дужок Лі одержано зображення розв’язків суттєво нелінійної системи, яка задовольняє рангову умову, у вигляді рядів, коефіцієнти яких можуть бути ефективно обчислені. Таке зображення дозволяє детальніше вивчити властивості траєкторій неголономних систем. Зокрема, побудовано зображення залишкового члену ряду Вольтери через залишкові члени рядів Тейлора. Крім того, досліджено залежність величини норми залишкового члену ряду Вольтери від норми керування та відстані між початковим та кінцевим станами системи. Наскільки відомо, таке дослідження ще не проводилося в існуючій літературі.

3. Побудовано нову сім’ю функцій керувань у вигляді високочастотних тригонометричних поліномів для планування руху системи, що задовольняє рангову умову з дужками Лі другого або вищих порядків. За допомогою запропонованих керувань відповідну крайову задачу зведено до системи алгебраїчних рівнянь на коефіцієнти керуючих тригонометричних поліномів. Цей новий метод розв'язання двоточкової задачі керування дозволяє, по-перше, отримати явні вирази для коефіцієнтів керувань, і, по-друге, довести розв’язність такої задачі, що не було зроблено в існуючих роботах. Крім того, у процесі дослідження отримано конструктивний метод визначення частот тригонометричних порівнянь, що становить відміну від результатів Y. Chitour, F. Jean, W. Liu, R. Long, H.J. Sussmann та ін., де лише припускається, що частоти керувань повинні бути достатньо великими.

4. Розвинуто метод дослідження асимптотичної поведінки розв'язків суттєво нелінійних систем у критичних випадках. Такий результат поширює роботи В.І. Зубова, О.Л. Зуєва, М.М. Красовського, К. Пайффера, О.Я. Савченка на клас систем з нейтральною та стійкою компонентами довільних розмірностей. На відміну від відомих результатів, запропонований підхід дозволяє побудувати степеневу оцінку норми розв’язків системи з конструктивним обчисленням коефіцієнтів оцінки і побудовою функції Ляпунова для системи зі стійкою і критичною компонентами.

5. Запропоновано нові умови асимптотичної стійкості та отримано декілька класів функцій Ляпунова для систем диференціальних рівнянь, частоти яких пов'язано резонансними співвідношеннями парних порядків. На відміну від існуючих результатів припускається, що система має довільну кількість резонансних пар частот. Відмітимо, що для нерезонансного випадку існують досить прості критерії асимптотичної стійкості за формами непарних порядків, наприклад, теореми А.М. Молчанова та Г.В. Каменкова. На відміну від цього, у монографії Л.Г. Хазіна та Е.Е. Шноля відзначається, що для систем з резонансними суто уявними власними значеннями умови стійкості не можуть бути записані у явній формі, проте існують достатні умови асимптотичної стійкості, що використовують коефіцієнти системи. Однак, ні в цій, ні в інших роботах у цьому напрямку (статті Я. Гольтцера, П.С. Красильнікова, А.Л. Куніцина, Г.Г. Хазіной, J. Awrejcewicz, F.Bene-dettini, J.H. Fu, Z.K. Peng, A.F. Vakakis та ін.), не було наведено алгебраїчних умов асимптотичної стійкості для систем з довільною кількістю резонансних частот, що свідчить про новизну результатів представленої роботи. Крім того, вперше проведено дослідження впливу наявності внутрішніх резонансів у системі на асимптотичну поведінку її траєкторій.

6. Уперше розв’язано мінімаксну задачу оптимальної стабілізації з функціоналом, що визначає граничну поведінку розв’язків на нескінченності, в критичному випадку однієї пари суто уявних коренів. Для такої задачі побудовано оптимальне керування коливаннями маятника при неповному вимірі фазового вектору. Важливою відмінністю отриманих результатів від інших підходів до розв'язання задачі оптимальної стабілізації в критичних випадках (роботи Є.О. Гальпєріна, E.H. Abed, S.S. Banda, C.-H. Chen, J.H. Fu, D.-C. Liaw, L. Xiangdong, H. Wenhu, та ін.) є використання мінімаксного критерію якості та врахування обмежень на норму керувань. Навіть для лінійних керованих систем, задачу оптимальної стабілізації з обмеженим керуванням, сформульовану в термінах мінімізації спектральної абсциси, включено до переліку NP-складних по відношенню до вимірності системи. Мінімаксні задачі керування становлять предмет низки досліджень, однак для порівняння представленої роботи з публікаціями з мінімаксного аналізу слід зазначити, що в жодній з них не досліджувалася задача стабілізації у критичних випадках. З оглядом на вивчену літературу у цій галузі можна зробити висновок, що результати, застосовні до оптимізації швидкості згасання розв'язків суттєво нелінійних систем у класі функцій зворотного зв'язку з обмеженнями, отримано вперше.

7. Уперше доведено теорему про притягання траєкторій динамічної системи для майже всіх початкових умов. Отримано достатні умови притягання розв’язків системи диференціальних рівнянь до інваріантної множини для майже всіх початкових умов у термінах функцій щільності. Цей результат поширює теорему А. Рантцера на клас абстрактних динамічних систем, а також систем звичайних диференціальних рівнянь без строгої монотонності міри на потоці. За допомогою доведеної теореми одержано умови стабілізовності стану рівноваги системи, що описує обертання твердого тіла у термінах кватерніонів з афінним керуванням.

8. Уперше отримано необхідні умови стабілізовності нелінійної керованої системи, що зображено за допомогою трьох критичних функцій Гамільтона. Такий результат ґрунтується на методі Б. Якубчика, який описав керовані системи в термінах їх інваріантів відносно перетворень із зворотним зв'язком. Ним одержано повну систему інваріантів для нелінійних керованих систем з використанням допоміжних функцій (символів) на кодотичному розшаруванні фазового простору. За допомогою такого підходу Б. Якубчиком і О.Л. Зуєвим було досліджено окремий випадок систем, які можна зобразити за допомогою двох критичних гамільтоніанів. Проте задача опису в термінах символів необхідних і достатніх умов стабілізовності для більш широкого класу керованих систем уперше розв’язано у представленій роботі. Крім того, новим результатом є застосування такого методу до синтезу функцій зворотного зв'язку з обмеженою множиною значень. Так, у багатьох задачах прикладного характеру природним чином виникають обмеження на керування, які задано системою лінійних нерівностей, так що обмежуюча множина в таких випадках може мати вигляд багатогранника. Зокрема, у даній роботі отримані умови стійкості застосовано до стабілізації обертань твердого тіла у випадку трьох кутових точок множини значень керуючого моменту.

**Теоретичне та практичне значення отриманих результатів**

У представленій роботі розроблено такі методи синтезу керувань для задач стабілізації та планування руху, які з одного боку мають теоретичне обґрунтування та застосовні для широкого кола систем, а з іншого боку відповідають потребам сучасної інженерії та є потенційно ефективними в практичній реалізації. На відміну від існуючих результатів обчислювального характеру, доведено збіжність отриманих алгоритмів синтезу функцій керувань. Крім того, у порівнянні з відомими аналогами, запропоновані методи мають суттєві переваги з практичної точки зору: вони не потребують ніяких додаткових перетворень, що значно полегшує можливість їх алгоритмічної реалізації в системах комп’ютерного керування механічними системами та зменшує кількість необхідних ітерацій; наведено явний метод визначення частот керувань, що забезпечують необхідну точність керуючого алгоритму; підхід до побудови оцінки норми розв'язків систем у критичних випадках передбачає явне визначення коефіцієнтів оцінки, що дозволяє обчислити та оптимізувати швидкість згасання коливань осцилюючої системи.

Окрім основних результатів роботи, в процесі дослідження отримано низку допоміжних результатів, які мають самостійну теоретичну цінність та можуть представляти інтерес для науковців зі суміжних областей. Зокрема, до таких результатів слід віднести зображення розв’язків системи, що задовольняє рангову умову з дужками Лі, за допомогою рядів Вольтери. На відміну від розкладання розв’язків по базису Ф. Холла, що є поширеною практикою в класичній літературі, таке зображення дозволяє детальніше вивчити властивості траєкторій системи. Крім того, дослідження загальних властивостей рядів Вольтерри становитиме інтерес також і для спеціалістів в областях диференціальних рівнянь та функціонального аналізу. Також очікується, що застосування методу ненульового обертання до доведення розв’язності системи алгебраїчних рівнянь на коефіцієнти керувань приведе до розробки нового способу доведення розв’язності крайових задач для важливих класів систем звичайних диференціальних рівнянь.

Потенційними напрямками застосування отриманих результатів є такі важливі задачі теорії керування, як планування руху системи в околі заданої кривої, навігація систем у середовищах з нерухомими чи динамічними перешкодами, стабілізація афінних за керуванням систем з ненульовим зсувом, оптимальне гасіння коливань систем з резонансними частотами, стабілізація систем з невідомими параметрами, тощо.

Отримані в роботі теоретичні результати можуть бути впроваджені в перспективі у системах комп’ютерного керування рухом робототехнічних комплексів зі зв’язками кочення, маніпуляторів, коливальних механічних систем з частковою дисипацією, та космічних комплексів з пружними елементами. Зокрема, наведемо декілька інженерних проблем, які можуть бути розв’язані шляхом впровадження реалізації результатів поданого проекту.

1) Розробка менш ресурсозатратних алгоритмів планування руху багатокомпонентних транспортних систем та мобільних колісних роботів. У цьому напрямку коло можливих застосувань керувань, що розв’язують задачу наближеного відстеження траєкторій, містить такі проблеми, як навігація мобільних роботів, автоматичне паркування персональних транспортних засобів та їх систем, автоматичне перевезення багажу в аеропорту системами з декількома причепами, та ін.

2) Підвищення точності маніпулювання тілами кочення з обмеженнями. Наразі існує декілька підходів до дослідження властивостей окремих представників цього класу систем (наприклад, кочення кулі по площині або по іншій кулі), але багато питань навіть для цих прикладів ще залишаються відкритими, а для більш складних систем алгоритми планування руху ще не розроблені. Однак, такі системи мають багато важливих застосувань. Одним з них є рука робота з гнучкими пальцями, де одне з тіл системи представляє кінчик пальця маніпулятора, а інше – об’єкт, з яким він контактує. Крім того, у колісних мобільних роботах одне тіло може представляти колесо (наприклад, кульове колесо) робота, а друге – вигнуту поверхню, по якій робот рухається.

3) Космічна робототехніка: незакріплені роботи в космосі є важкими для керування за допомогою двигунів чи внутрішніх моторів, оскільки вони зберігають повний кінетичний момент. Це обмеження можна розглядати як неінтегровний зв'язок. Рух астронавтів має східну природу, тож розробка стратегії переорієнтації астронавта є задачею планування руху неголономної системи.

**Кількість публікацій**

Результати роботи представлено у 26 наукових публікаціях, які включають в себе 5 статей у міжнародних наукових виданнях, що індексуються у базах даних Scopus і Web of Science; 6 статей у провідних фахових вітчизняних виданнях; 15 тез доповідей.

Кількість посилань на публікації: 12 згідно бази даних Google Scholar; 5 згідно бази даних SCOPUS.

h-індекс автора: 2 згідно бази даних Google Scholar; 1 згідно бази даних SCOPUS.

Основні результати роботи доповідались та обговорювались на провідних наукових вітчизняних та зарубіжних конгресах, конференціях, зокрема, в Данії, Італії, Німеччині, Польщі, США, Україні, Франції, Японії, та на семінарах таких провідних міжнародних установ, як Університет Штутгарту (Німеччина), Університет “Федеральна вища школа Цюріха” (ETH Zürich, Швейцарія), Міланська політехніка (Італія), Інститут А. Пуанкаре (Франція), Інститут математики Польської академії наук, та ін.

Науковий співробітник Інституту прикладної

математики і механіки НАН України,

кандидат фізико-математичних наук В.В. Грушковська