

Національна академія наук України
Інститут математики

РЕФЕРАТ
роботи, висунутої на здобуття
щорічної премії Президента України для молодих вчених
за 2021 рік

**ЕКСТРЕМАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ
НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ
ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

Пожарська (Швай) Катерина Віталіївна,
кандидат фізико-математичних наук,
молодший науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Степанюк Тетяна Анатоліївна,
кандидат фізико-математичних наук,
науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Янченко Сергій Якович
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник, докторант,
Інститут математики НАН України

Актуальність та загальна характеристика роботи

Теорія наближення – важливий і фундаментальний розділ математичного аналізу, який бере початок ще з робіт таких всесвітньо відомих математиків як Жан Б. Фур'є, К. Вейерштрасс, П. Л. Чебишов, А. Лебег, Д. Джексон, Ш. Валле Пуссен, С. Н. Бернштейн. Актуальними проблемами теорії наближення є розв'язання широкого кола екстремальних задач, зокрема, дослідження питань апроксимації класів функцій, як однієї так і багатьох змінних, різними методами, а також знаходження серед них оптимальних у тому чи іншому сенсі.

Тематика, пов'язана з теорією наближення функцій як однієї, так і багатьох змінних, є традиційною для математиків України та популярною у таких розвинених країнах як Німеччина, США, Китай, Іспанія та ін. Над нею у свій час в Україні працювали С. Н. Бернштейн, М. О. Лаврентьєв, М. П. Кравчук, С. М. Нікольський, М. Г. Крейн, Є. Я. Ремез, В. К. Дзядик, М. П. Корнейчук, О. І. Степанець, О. П. Тіман та інші видатні математики, які значною мірою заклали фундамент теорії наближення функцій як в Україні, так і за її межами, визначили основні її напрямки. Автори даної роботи належать до київської наукової школи з теорії наближення, заснованої С. М. Нікольським, В. К. Дзядиком, М. П. Корнейчуком та О. І. Степанцем.

Починаючи з 60-х років минулого століття потужного розвитку набули дослідження питань наближення періодичних функцій багатьох змінних. У цьому напрямі працювали R. A. DeVore, К. І. Бабенко, Є. С. Белінський, Е. М. Галєєв, С. М. Нікольський, С. Б. Стечкін, В. М. Тихомиров, В. М. Темляков. Особливе місце серед екстремальних проблем теорії наближення функцій як однієї так і багатьох змінних займають задачі, пов'язані з лінійною та нелінійною апроксимацією функціональних класів. Поглиблений інтерес в останні десятиліття до нелінійної апроксимації (зокрема, найкращих ортогональних тригонометричних наближень і найкращих M -членних тригонометричних наближень) зумовлений, насамперед, тим, що у багатьох ситуаціях нелінійні методи наближення виявились більш ефективними у порівнянні з лінійними методами. Цей напрям пов'язаний з роботами Р. С. Ісмагілова, В. Є. Майорова, С. Б. Кашина, В. М. Темлякова, Е. С. Белінського, О. І. Степанця, А. С. Романюка,

A. C. Сердюка, X. Трібеля, R. A. DeVore, D. Dung, T. Kühn, T. Ullrich, F. Cobos. Згодом почали досліджувати наближення класів неперіодичних функцій багатьох змінних, у цьому напрямі можна згадати таких відомих вчених як Я. С. Бугров, D. Dung, X. Трібель, Sun Yongsheng, Wang Heping, Liu Yongping, W. Sickel та ін.

До однієї з основних задач теорії наближення функцій відносять задачу про відшукання асимптотичних рівностей для точних верхніх меж наближень заданого фіксованого класу періодичних функцій за допомогою тригонометричних поліномів, породжених певними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є. Ця задача має багату історію, яка пов'язана з іменами таких відомих математиків, як А. М. Колмогоров, С. М. Нікольський, Б. Надь, В. К. Дзядик, М. П. Корнейчук, С. Б. Стечкін, О. П. Тіман, О. І. Степанець, В. П. Моторний, С. О. Теляковський та інші.

До початку 80-х років найбільш загальними класами функцій, на яких досліджувалися задачі теорії наближення, були класи, що визначалися похідними в сенсі Вейля-Надя. У 80-90-х роках минулого сторіччя О. І. Степанцем був запропонований новий підхід до класифікації періодичних функцій, що базувався на понятті (ψ, β) -похідної. Така класифікація дала змогу не тільки охопити весь спектр сумовних (неперервних) функцій, а й врахувати більш тонкі властивості конкретних функцій. Тому результати, які отримано для цих класів з одного боку мають загальний характер, а з другого — виявляють цілу низку нових ефектів, котрі не можуть бути поміченими у шкалах раніше відомих класів.

В останні десятиліття особливо широкої популярності набула теорія наближень на сфері, а також проблеми відшукання оптимальних точкових конфігурацій, які мають важливе значення для вирішення різних прикладних проблем. У цьому напрямку активно працюють багато відомих математиків зі всього світу, зокрема: I. H. Sloan, E. B. Saff, J. Beck, W. Chen, R. S. Womersley, H. Woźniakowski, H. N. Mhaskar, K. B. Stolarsky та інші. Окремо відзначимо українських дослідників: М. В'язовську А. Бондаренка, Д. Радченка, які у 2013 році одержали вагомні результати, пов'язані з проблемою про існування сферичних t -дизайнів на d -вимірній сфері. Ці результати уже отримали світове визнання.

Незважаючи на значну кількість опублікованих робіт, у зазначених напрямках залишився ціла низка нез'ясованих питань. Перед авторами даного циклу робіт стояла задача: з одного боку – вдосконалити відомі та розробити нові методи дослідження низки апроксимативних характеристик, а з іншого боку – встановити оцінки відповідних величин на класах Нікольського-Бесова як періодичних так і неперіодичних функцій однієї та багатьох змінних та їхніх узагальненнях, а також на класах 2π -періодичних (ψ, β) -диференційовних функцій. При цьому, вдалося суттєво доповнити відомі результати новими оцінками для найкращих наближень, наближень за допомогою сум Фур'є, найкращих M -членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, найкращих білінійних наближень, ентропійних чисел, похибки найгіршого інтегрування та енергій на одиничній сфері.

З огляду на сказане, дослідження, проведені у циклі праць, є актуальними та важливими.

Зміст роботи, наукова новизна і цінність результатів роботи

Основною метою роботи «ЕКСТРЕМАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ» є розв'язання низки актуальних задач теорії наближень, а саме знаходження порядкових оцінок таких важливих апроксимативних характеристик як найкраще наближення, найкраще ортогональне тригонометричне наближення, найкраще M -членне тригонометричне наближення, білінійне наближення, ентропійні числа функціональних компактів (а саме, класів Нікольського-Бесова та їхніх узагальнень, класів диференційованих (у сенсі Степанця) функцій та ін.) на рівні розв'язання конкретних екстремальних задач теорії наближення.

У роботах К.В. Пожарської, що включені до циклу та висвітлені у II розділі, встановлено порядкові оцінки низки характеристик нелінійної апроксимації, а саме, найкращих ортогональних та M -членних тригонометричних наближень, білінійних наближень класів $L_{\beta, p}^{\nu}$ періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою узагальненою похідною. Також, одержано оцінки ентропійних чисел класів типу Нікольського-Бесова $B_{p, \theta}^{\Omega}$ періодичних функцій як однієї, так і

багатьох змінних (тобто класів функцій, які визначаються мажорантною функцією Ω для їхнього мішаного модуля неперервності). Розв'язано задачу Колмогорова-Нікольського для функцій з класу Ліпшиця, де наближення здійснюється за допомогою спряжених інтегралів Абеля-Пуассона.

При цьому, під час дослідження поведінки відповідних найкращих ортогональних та M -членних тригонометричних наближень у метриці простору Лебега, розглянуто важливий випадок так званої “малої гладкості” досліджуваних функцій. Крім цього, вдалося встановити оцінки зазначених величин у одному з граничних випадків, а саме – для критичного значення $p=1$ класів (ψ, β) -диференційовних функцій.

У результаті проведених досліджень, було виявлено випадки, коли оцінки найкращих M -членних тригонометричних наближень кращі за порядком, ніж оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та наближень за допомогою тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

Крім згаданих апроксимативних характеристик, важливе місце у нелінійній апроксимації займають, так звані, білінійні наближення і їхні витoki йдуть з роботи Е. Шмідта 1907 року. Дана апроксимативна характеристика тісно пов'язана з найкращим M -членним тригонометричним наближенням, а також з колмогоровським поперечником досліджуваних класів та може бути використана для їхнього знаходження. Пожарською К.В. знайдено порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змінних із класів періодичних (ψ, β) -диференційовних функцій. Одержані результати доповнюють відомі оцінки найкращих білінійних наближень на класах Вейля-Надя та Степанця, що одержані Е. С. Белінським, В. М. Темляковим та А. С. Романюком.

Ще один напрям досліджень пов'язаний із ентропійними числами функціональних множин. Відомо, що ентропія та близька до неї характеристика – ентропійні числа є одними з основних характеристик компактів. Володіючи інформацією про вказані величини для певної компактної множини, можна робити висновок, наскільки великою (масивною) є ця множина, і якими

апроксимативними властивостями вона володіє. Пожарською К. В. встановлено порядкові оцінки ентропійних чисел класів періодичних функцій багатьох змінних $B_{p,\theta}^\Omega$, які при певному виборі функції Ω збігаються з класами Нікольського–Бесова $B_{p,\theta}^r$, та залишалися практично зовсім не дослідженими у цьому напрямі.

У роботах Т.А. Степанюк, що включені до циклу та висвітлені у I розділі, отримано низку важливих результатів. Зокрема, встановлено оцінки важливих апроксимативних характеристик класів 2π періодичних функцій (які визначаються за допомогою поняття (ψ, β) -похідної), таких як наближення сумами Фур'є, наближення інтегралами Пуассона та інтегралами Вейерштраса, найкращі наближення, найкращі m -членні тригонометричні наближення, найкращі ортогональні тригонометричні наближення, розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для наближень сумами Фур'є на класах узагальнених інтегралів Пуассона. Також розв'язано задачі на сфері, пов'язані з похибкою найгіршого інтегрування та порівнянням властивостей різних точкових конфігурацій на одиничній сфері.

Для класів $L_{\beta,p}^\psi$ порядкові оцінки апроксимативних характеристик встановлювались, як правило, у випадках, коли ψ спадають до нуля зі швидкістю степеневі функції. Задачі по встановленню точних порядків зазначених характеристик класів $C_{\beta,p}^\psi$ у випадку, коли ψ спадають до нуля дуже швидко (не повільніше за геометричну прогресію), або навпаки – у випадку коли, добуток $\psi(t)t^{1/p}$ спадає до нуля повільніше за будь-яку степеневу функцію, з певних причин залишалися нерозв'язаними. У роботах Т.А. Степанюк встановлено порядкові оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C_{\beta,p}^\psi$, $1 \leq p < \infty$, у рівномірній метриці у випадку, коли добуток $\psi(t)t^{1/p}$ спадає до нуля повільніше за будь-яку степеневу функцію. Отримано порядкові рівності для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами класів $C_{\beta,p}^\psi$, $1 \leq p < \infty$, у випадку, коли ψ спадають до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію.

Отримані результати дозволили виявити нові та цікаві ефекти, які для дослідженого раніше випадку – коли добуток $\psi(t)t^{1/p}$ спадає до нуля зі степеневу швидкістю, не спостерігалися.

Дослідження властивостей точкових конфігурацій на сфері та теорія наближення на сфері – один з популярних напрямків чисельного аналізу та теорії наближень у світі. Серед точкових конфігурацій однією з найвідоміших є сферичні t -дизайни (введені у 1977 р. P. Delsarte, J. M. Goethals, і J. J. Seidel). У роботах Т. А. Степанюк отримано асимптотичні рівності для загальних енергій, коли в якості точкової множини беруться ймовірнісні точки з так званого “jittered sampling”; асимптотичні рівності для дискретної s -енергії Рісса послідовності добре розподілених t -дизайнів на одиничній сфері, а також встановлено двосторонні оцінки для похибки “найгіршого” інтегрування і показано що сферичні t -дизайни дають той же порядок що й “мінімальні” точкові конфігурації.

У роботах С.Я. Янченка, що включені до циклу та висвітлені у III розділі, розглянуто класи неперіодичних функцій, зокрема, класи Нікольського-Бесова з домінуючою мішаною похідною; узагальнені (за гладкішим параметром) класи Нікольського-Бесова з домінуючою мішаною похідною, ізотропні та анізотропні класи Нікольського-Бесова та отримано низку важливих результатів з точки зору знаходження оцінок різних апроксимативних характеристик.

Зокрема, вдалося поширити результати Wang Heping та Sun Yongsheng стосовно наближення функцій з класів Нікольського $S_1^r H(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур’є у східчастому гіперболічному хресті на класи Нікольського-Бесова $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$. Варто відзначити, що розглянуто, так званий, граничний випадок задання класів, коли їхні елементи подаються через аналоги “блоків” сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних. Також встановлено раніше не відомі оцінки норми даних “блоків” у просторі Лебега, такі оцінки можуть мати самостійний інтерес та бути використані для розв’язання різних задач теорії наближення.

Для узагальнених класів Нікольського-Бесова $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$ розглянуто наближення цілими функціями зі спектром на множинах, які породжуються

поверхнями рівня функцій Ω . Дані множини є узагальненням гіперболічних хрестів на випадок довільної функції Ω . Зауважимо, пристосування вибору наближаючого агрегату до функцій Ω дало можливість відмовитися від низки умов на саму функцію Ω , які необхідні при наближенні у східчастому гіперболічному хресті. Такі дослідження для класів Нікольського H_p^Ω періодичних функцій запропоновано у роботах М. М. Пустовойтова. Також для класів $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$ розглянуто аналог найкращого ортогонального тригонометричного наближення, яке у деяких випадках має переваги перед наближення цілими функціями з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

При дослідженні ізотропних та анізотропних класів Нікольського-Бесова основна увага була приділена знаходженню оцінок наближення за допомогою сум типу Валле Пуссена та оцінок найкращого наближення цілими функціями експоненціального типу з носіями їх перетворення Фур'є в d -вимірних паралелепіпедах, відповідно. Зауважимо, що до цього основна увага приділялася вивченню даних класів з точки зору дослідження теорем вкладення.

У рамках даної роботи було використано та вдосконалено відомі у світі ефективні методи розв'язання задач теорії наближення у поєднанні із класичними методами теорії наближення, котрі використовуються при розв'язанні тих чи інших конкретних задач, а також використано методи теорії функціональних просторів, теорії міри та інші. Розвинено ідеї та методи, що запропоновані у роботах О. І. Степанця, А. С. Романюка, В. Н. Темлякова (США), Sun Yongsheng, Wang Heping (Китай), I. H. Sloan (Australia), K. Hesse (Germany), J. S. Brauchart (Austria), а також запропоновано нові підходи та методи до розв'язання поставлених задач.

Робота має теоретичний характер. Її результати та методи їх отримання знаходять застосування у питаннях оцінок сингулярних чисел інтегральних операторів, колмогоровських поперечників відповідних функціональних класів, а також можуть бути застосовані до розв'язання інших задач теорії наближень. Усі результати є новими та складають суттєве доповнення у розвиток відповідних

напрямів теорії наближення. Вони доповідалися на різних міжнародних наукових конференціях, школах та наукових семінарах як в Україні так і за її межами.

Основні результати роботи

- Знайдено порядкові оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C_{\beta,p}^{\psi}$, $1 \leq p < \infty$, у метриці простору C у випадку, коли функція $g_p(t) = \psi(t)t^{1/p}$, $g_p \in M_0$. Аналогічні оцінки одержано у метриках просторів L_s , $1 < s \leq \infty$, для класів $L_{\beta,1}^{\psi}$. (Т. А. Степанюк)

- Отримано порядкові рівності для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами класів $C_{\beta,p}^{\psi}$, $1 \leq p < \infty$, у випадку, коли ψ належать до множини M_{∞}'' . (Т. А. Степанюк)

- Знайдено точні порядкові оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $C_{\beta,p}^{\psi}$, у метриках просторів L_s , при всіх $1 \leq p, s \leq \infty$, і $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли $\psi \in M_{\infty}'$. (Т.А. Степанюк)

- Встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилення наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці на класах узагальнених інтегралів Пуассона $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$, $0 < r < 1$. (Т. А. Степанюк)

- Досліджено поведінка найгіршої похибки чисельного інтегрування на одиничній сфері в просторі \mathbb{R}^{d+1} , $d \geq 2$, для класів $H^{(d/2,\gamma)}$, $\gamma > 1/2$, неперервних функцій на сфері з додатковим логарифмічним множником. Для цих класів отримано аналогічні верхні та нижні оцінки для “найгіршої” похибки чисельного інтегрування. (Т. А. Степанюк)

- Проведено порівняння оцінки енергій для певних ймовірнісних та визначених (детермінантних) точкових множин (сферичні t -дизайни, та точкові множини, які мінімізують енергію). Також отримано асимптотичні рівності для дискретної s -енергії Рісса для послідовності добре розподілених t -дизайнів на одиничній сфері. (Т. А. Степанюк)

- Досліджено апроксимативні властивості інтегралів Пуассона, бігармонійних інтегралів Пуассона та інтегралів Вейерштраса на деяких класах періодичних диференційовних функцій. (Т. А. Степанюк, К. В. Пожарська)

- Встановлено порядкові оцінки найкращих ортогональних та M -членних тригонометричних наближень періодичних функцій багатьох змінних, які при певному виборі кратної послідовності, за допомогою якої вони означені, збігаються з аналогами ядер Бернуллі. При цьому виявлено відмінності у поведінці відповідних апроксимативних характеристик у просторах Лебега. (К. В. Пожарська)

- Одержано порядкові оцінки найкращих тригонометричних наближень класів типу Вейля-Надя у метриці простору Лебега для критичного значення одного з параметрів цих класів та у випадку так званої “малої гладкості” досліджуваних функцій. Виявлено випадки, коли оцінки найкращих M -членних тригонометричних наближень кращі за порядком, ніж оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та наближень за допомогою тригонометричних поліномів з “номерама” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів. (К. В. Пожарська)

- Знайдено порядкові оцінки найкращих білінійних наближень класів періодичних функцій $2d$ змінних, які породжені функціями d змінних із класів типу Вейля-Надя, всеможливими зсувами їхнього аргументу, при цьому похибку наближення оцінено у метриці простору Лебега. (К. В. Пожарська)

- Встановлено порядкові оцінки ентропійних чисел класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних типу Нікольського-Бесова, які визначаються мажорантною функцією для їхнього мішаного модуля неперервності, у метриці простору Лебега та у рівномірній метриці. (К. В. Пожарська)

- Встановлено точні за порядком оцінки наближення класів функцій Нікольського-Бесова $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур’є у східчастому гіперболічному хресті, при цьому похибку наближення оцінено у метриці простору Лебега. (С. Я. Янченко)

- Отримано точні за порядком оцінки найкращого наближення функцій з класів Нікольського-Бесова $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці. (С. Я. Янченко)

- Для функцій з узагальнених класів Нікольського-Бесова $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$ одержано точні по порядку оцінки наближення у метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур’є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функцій Ω . (С. Я. Янченко)

- Знайдено точні за порядком оцінки найкращого наближення функцій з анізотропних класів Нікольського-Бєсова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних цілими функціями з носіями їхнього перетворення Фур'є в d -вимірних паралелепіпедах. Також встановлено точні за порядком оцінки відхилення функцій з цих класів від їхніх відрізків інтеграла Фур'є у рівномірній метриці. (С. Я. Янченко)

- Одержано точні за порядком оцінки наближення ізотропних класів Нікольського-Бєсова, неперіодичних функцій багатьох змінних, які визначені на R^d , за допомогою сум типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках. (С. Я. Янченко)

Публікації результатів роботи та їх цитування

Робота складається з 74 наукових праць, опублікованих у 2013 – 2019 роках, серед яких 33 статті у провідних вітчизняних та міжнародних фахових виданнях та 41 тези наукових конференцій. У міжнародних журналах опубліковано 23 статті, з яких 21 стаття – в англomовних журналах з імпакт-фактором. Загальний обсяг статей у журналах – 480 с.

Усі публікації є реферованими. У міжнародній наукометричній базі даних Google Scholar 187 цитувань, h -індекс = 9. У міжнародній наукометричній базі даних SCOPUS зазначена 21 публікація, яка має загалом 88 цитувань та h -індекс = 6, у базі даних Web of Science вказано 17 публікацій, які мають загалом 32 цитування та h -індекс = 4. У міжнародній наукометричній базі даних робіт з математики та теоретичної механіки MathSciNet міститься 25 публікацій, які мають загалом 23 цитування та h -індекс = 2.

Молодший науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України
кандидат фізико-математичних наук

К.В. Пожарська

Науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України
кандидат фізико-математичних наук

Т.А. Степанюк

Старший науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України
кандидат фізико-математичних наук

С.Я. Янченко

Учений секретар
Інституту математики НАН України
кандидат фізико-математичних наук

І.В. Соколенко