КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

РЕФЕРАТ

на цикл наукових праць
«Випадкові процеси з регенерацією»

Для участі у конкурсі на здобуття щорічної премії
Президента України для молодих учених

Маринич Олександр Віталійович
доктор фізико-математичних наук,
доцент кафедри дослідження операцій
факультету комп'ютерних наук та
кібернетики Київського національного
університету імені Тараса Шевченка

КИЇВ 2017

1 Вступ

Основним об'єктом досліджень циклу є *самоподібні випадкові системи*, які також називаються *випадковими регенеративними структурами*. Під випадковою регенеративною структурою ми розуміємо випадковий об'єкт або їх родину, з підхожим чином визначеним поняттям «розміру» такий, що ймовірнісні характеристики об'єктів різного розміру узгоджені, а їх розподіли є інваріантними відносно фіксованої операції видалення частини.

Класичним прикладом випадкової регенеративної структури є *випадкова рівномірна перестановка*. Нехай $\mathfrak{S}_n$ – симетрична група множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, а σ_n – елемент $\mathfrak{S}_n$, вибраний навмання. Випадкова рівномірна перестановка σ_n, або більш точно сім'я перестановок $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє такі дві властивості[1]:

- за умови, що цикл, який містить 1, має довжину $m \in \{1, \ldots, n\}$, його видалення з перестановки σ_n та перенумерація решти елементів дає рівномірну перестановку множини $\{1, 2, \ldots, n - m\}$, тобто випадковий елемент множини $\mathfrak{S}_{n-m}$ з тим же розподілом, що й σ_{n-m};

- видалення елемента $n+1$ з σ_{n+1} дає випадкову перестановку з тим же розподілом, що й σ_n.

Перша властивість відповідає регенеративності як рисі збереження розподілу відносно операції «видалення частини» – в даному випадку видалення першого циклу. Друга властивість демонструє, що рівномірні перестановки $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ узгоджені для різних розмірів n.

Поняття регенерації у випадкових комбінаторних структурах вперше виникло в контексті робіт О. Гнєдіна, Дж. Пітмена та М. Йора по регенеративним композиціям та розбиттям. Запропонована згаданими авторами модель композицій та поняття регенеративності, що лежить в її основі, виявились надзвичайно вдалими, а відповідні ідеї знайшли застосування в багатьох інших областях прикладної ймовірності, включаючи теорію коалесцентів, теорію випадкових перестановок, в задачах випадкового розміщення, аналізі процедур вибору лідера тощо. Подальший розвиток відповідних теорій

[1] Нагадаємо, що кожна перестановка може бути записана у вигляді диз'юнктного об'єднання циклів.

вимагав розробки асимптотичного апарату процесів дробового ефекту, а також розробки теорії збурених випадкових блукань. В даному циклі робіт згадані моделі та внесок автора до відповідних теорій представлені з єдиної точки зору за допомогою поняття випадкової регенеративної структури. У циклі робіт докладно досліджено такі моделі:

- випадкові процеси з імміграцією в моменти відновлення (поняття було вперше введено у статті автора [2]) та, зокрема, процеси дробового ефекту, побудовані за процесом відновлення;
- випадкові регенеративні композиції;
- випадкові регенеративні перестановки (поняття було вперше введено у статті автора [20], як узагальнення згаданих вище рівномірних перестановок);
- переставні коалесценти;
- процедури випадкового просіювання (поняття було вперше введено у статті автора [6]) та процедури вибору лідера.

Результати, отримані в циклі робіт, носять в основному теоретичний характер і є внеском до теорії дискретних випадкових структур з регенерацією. Основні результати, а також ідеї та методи, що використовуються в роботі, можуть бути корисними у різних розділах теорії ймовірностей та математичної статистики. З іншого боку, поняття регенерації, самоподібності та рекурсивності у стохастичних системах, притаманні об'єктам даного дослідження, виникають у багатьох прикладних задачах. Випадкові процеси з імміграцією та процеси дробового ефекту є математичною моделлю електричного струму у вакуумних трубках, дробового ефекту в іонних каналах, затримок у врегулюванні страхових претензій, сейсмічної активності регіону та багатьох інших процесів у різних областях науки. Фактично, будь-який процес, який описує кумулятивний ефект однотипних імпульсів, що поступають у систему у випадкові, але регулярно розподілені моменти часу, є випадковим процесом з імміграцією. Теорія переставних коалесцентів та регенеративних композицій є складовою математичного апарату генетики популяцій. Випадкові дерева, процедури вибору лідера (випадкові просіювання) та випадкові перестановки повсякчас застосовуються в комп'ютерних науках, зокрема у математичному аналізі алгоритмів.

Широкий клас прикладних та теоретичних проблем, в яких виникають випадкові регенеративні структури та випадкові процеси з регенерацією, сприяв появі помітної кількості публікацій, присвячених їх дослідженню, що свідчить про високу актуальність та популярність цієї проблематики. Серед найважливіших робіт згадаємо серію статей К. Клюппельберг, Т. Мікоша та співавторів про процеси дробового ефекту, побудовані за процесом Пуассона; низку робіт А. Барбура, О. Гнєдіна, М. Йора, О. Іксанова, Дж. Пітмена та інших про регенеративні композиції та розбиття; статті Ж. Берестикі, Н. Берестикі, О. Гнєдіна, О. Іксанова, В. Лімік, М. Мьолє, С. Сагітова, Дж. Пітмена та Дж. Швайнсберга по коалесцентам з множинними злиттями; дослідження Л. Девроє, М. Дрмоти, О. Іксанова, Х. Махмуда, М. Мьолє, Х. Хвана пов'язані з випадковими деревами; статті Т. Брюсса, Р. Грюбеля, Х. Продінгера, В. Шпанковскі про процедури вибору лідера; публікації Р. Арратія, А. Вершика, П. Ердеша, С. Керова, В. Колчіна, С. Таваре, П. Турана, А. Якиміва по випадковим перестановкам.

2 Структура циклу «Випадкові регенеративні структури»

В цикл робіт «Випадкові регенеративні структури» входять 22 наукові статті, опубліковані протягом 2011–2017 рр., та монографія «Stochastic recurrences and their applications to the analysis of partition-valued processes», що вийшла друком у 2011 році у видавництві університету м. Утрехт (Нідерланди). З 22 статей 18 опубліковано англійською мовою в провідних міжнародних журналах з теорії ймовірностей, 20 статей опубліковано в журналах, що індексуються наукометричною базою Scopus. Роботи автора процитовано в 70 наукових статтях згідно з базою Scopus (253 згідно з Google Scholar), h-індекс=6 згідно з базою Scopus (10 згідно з Google Scholar). Співавторами частини робіт серії є відомі спеціалісти з теорії ймовірностей з Австрії, Німеччини, Нідерландів, Великобританії.

Згідно з наведеним вище переліком об'єктів дослідження, роботи серії можна розділити на групи[2]:

[2]Нумерація робіт в цьому рефераті відповідає нумерації в списку праць.

- випадкові процеси з імміграцією, процеси дробового ефекту [2,3,4,8,12,13,18,23];
- випадкові регенеративні композиції те перестановки [1,5,14,20];
- переставні коалесценти [1,15,16,21];
- процедури випадкового просіювання та процедури вибору лідера [6];
- загальна теорія випадкових регенеративних структур [1,7,9,10,11,17,19,22].

Нижче наведено основні результати, отримані в циклі робіт «Випадкові регенеративні структури». Кожній групі результатів передує короткий опис моделі, що вивчалась.

3 Огляд результатів по випадковим процесам з імміграцією та процесам дробового ефекту

Позначимо через $D(\mathbb{R})$ простір Скорохода неперервних справа дійснозначних функцій, що визначені на $\mathbb{R}$ та мають скінченні границі зліва в кожній внутрішній точці області визначення. Нехай $X := (X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ є випадковим процесом з траєкторіями у $D(\mathbb{R})$, який задовольняє умову $X(t) = 0$ для всіх $t < 0$, та нехай ξ є додатною випадковою величиною, яка може залежати від X.

Нехай $(X_1, \xi_1), (X_2, \xi_2), \dots$ є послідовністю незалежних копій пари (X, ξ), а $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є стандартним випадковим блуканням з кроками ξ_j, що стартує в нулі, тобто

$$S_0 := 0, \qquad S_k := \xi_1 + \cdots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Випадковий процес $Y := (Y(t))_{t\in\mathbb{R}}$, що визначений рівністю

$$Y(t) := \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(t - S_k) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{k+1}(t - S_k)\mathbf{1}_{\{S_k\leq t\}}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

назвемо *випадковим процесом з імміграцією у моменти відновлення* або просто *випадковим процесом з імміграцією*. Якщо $X = h$ м.н. для деякої невипадкової функції h, то відповідний процес Y називається *процесом дробового ефекту*.

В циклі робіт вперше введено поняття випадкового процесу з імміграцією в моменти відновлення та отримано такі результати для випадкових процесів з імміграцією, а також процесів дробового ефекту:

- отримано умови збіжності до стаціонарних процесів з імміграцією [3,13];
- встановлено умови збіжності з центруванням процесів дробового ефекту [18];
- доведено граничні теореми для процесів дробового ефекту з функціями відповіді, що не зростають, у випадках правильної зміни [4,12,18] та повільної зміни нормування [8];
- отримано граничні теореми для випадкових процесів з імміграцією у випадку правильної зміни нормування [2];
- отримано повний спектр граничних теорем для числа активних випадкових процесів в системі з імміграцією [23];
- досліджено властивості розподілів та властивості траєкторій процесів, що є граничними для випадкових процесів з імміграцією [2]. Зокрема, досліджено гельдеровість та встановлено локальні закони повторного логарифма для дробово інтегровних обернених стійких субординаторів [4].

4 Огляд результатів, пов'язаних з регенеративними композиціями та перестановками

Нехай $\left(Q_n\right)_{n\geq 0}$ є мультиплікативним випадковим блуканням, що визначається так

$$Q_0 := 1, \ \ Q_n = \prod_{j=1}^{n} W_j, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями випадкової величини $W \in (0,1)$, що називається кроком. Нехай $\left(U_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ є вибіркою з рівномірного на $[0,1]$ розподілу, що не залежить від (Q_n).

Гратка Бернуллі задається розміщенням точок рівномірної виборки по інтервалах (Q_{j+1}, Q_j), $j \in \mathbb{N}_0$. При цьому інтервал (Q_{i+1}, Q_i) називається *зайнятим*, якщо він містить принаймні одну точку рівномірної вибірки, та *порожнім* – у супротивному випадку.

Для фіксованого n позначимо через $U_{n,1} \leq \ldots \leq U_{n,n}$ порядкові статистики, що відповідають рівномірним точкам $U_1, \ldots, U_n$. Важливими характеристиками гратки Бернуллі, породженої n рівномірними точками, є такі функціонали:

- $L_n = \#\{0 \leq k \leq M_n - 1 : (Q_{k+1}, Q_k)$ не містить жодної рівномірної точки$\}$ – число порожніх інтервалів до останнього зайнятого, якщо інтервали рахувати справа наліво;

- $K_n = \#\{k \geq 0 : (Q_{k+1}, Q_k)$ містить принаймні одну рівномірну точку$\}$ – число зайнятих інтервалів;

- $K_{n,r} = \#\{k \geq 0 : (Q_{k+1}, Q_k)$ містить r рівномірних точок$\}$ – кількість інтервалів, в яких міститься r рівномірних точок;

- $O_n =$ НСК$\{r \in \mathbb{N} : K_{n,r} > 0\}$ – порядок випадкової перестановки, породженої граткою Бернуллі.

У роботах [1,5,14,20] досліджено асимптотику при $n \to \infty$ згаданих вище функціоналів та отримано такі результати.

- Дано класифікацію режимів слабкої збіжності числа K_n зайнятих інтервалів. Показано, що гратка Бернуллі може (і має) розглядатися як урнова схема Карліна у випадковому середовищі, при цьому випадковість середовища домінує над вибірковою випадковістю (розділ 2 монографії [1]).

- Наведено повну класифікацію режимів слабкої збіжності випадкових процесів $K_n(t) = \sum_{r=1}^{[n^t]} K_{n,r}$, $t \in [0, 1]$, [5].

- Досліджено режими слабкої збіжності скінченновимірних розподілів послідовності випадкових процесів $(L_{[n^t]})_{t\geq 0}$ числа порожніх інтервалів [14].

- Для класу випадкових підстановок, породжених гратками Бернуллі, отримано граничні теореми для їх порядку O_n (теореми типу Ердьоша-Тюрана) [20].

5 Огляд результатів про коалесценти з множинними зіткненнями

Переставний *коалесцент з множинними зіткненнями* $\Pi_n = (\Pi_n(t))_{t\geq 0}$ є марковським процесом, що набуває значень у множині розбиттів n натуральних чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. В момент часу $t = 0$ процес стартує з розбиття $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$, а далі еволюціонує згідно з правилом: у кожний момент часу $t \geq 0$, якщо число блоків дорівнює m, то кожен піднабір з k блоків зливається в один блок з інтенсивністю

$$\lambda_{m,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{m-k}\Lambda(\mathrm{d}x), \qquad 2 \leq k \leq m,$$

де Λ позначає деяку скінченну міру, визначену на сегменті $[0, 1]$. В зв'язку з останньою характеризацією, коалесценти з множинними зіткненнями також називають Λ-*коалесцентами.*

Важливою проблемою є дослідження таких функціоналів від переставних коалесцентів:

- X_n – число зіткнень (злиттів) коалесцента, доки не залишиться єдиний блок;
- τ_n – час до поглинання, тобто час до останнього злиття;
- L_n – сумарний час життя всіх блоків в коалесценті до часу поглинання.

В роботах [1,15,16,21] циклу отримано такі головні результати.

- Побудовано каплінг Λ-коалесценітв з пилом та випадкових регенеративних композицій [21], що дозволило дослідити слабку збіжність числа X_n зіткнень та часу поглинання τ_n коалесцентів з пилом.
- З використанням техніки ймовірнісних метрик отримано граничні теореми для числа злиттів у коалесцентах без пилової компоненти [16].
- Доведено збіжність повної довжини L_n дерева бета$(1, b)$-коалесцентів до 1-стійкого розподілу [16];
- Знайдено асимптотику моментів, доведено посилений закон великих чисел та центральну граничну теорему для числа X_n зіткнень у бета $(2, b)$-коалесцентах, $b > 0$ (розділ 3 монографії [1]).

6 Огляд результатів, пов’язаних з випадковими просіюваннями

Нехай R є довільною випадковою нескінченною підмножиною $\mathbb{N}$. Процедура випадкового просіювання множини $\mathbb{N}$ за допомогою R визначається як нескінченна послідовність «раундів» $1, 2, \dots$ така, що в раунді k:

- ще не просіяні точки $\mathbb{N}$ (в кожному раунді їх нескінченна кількість) перенумеровуються зі збереженням порядку;
- після перенумерації, визначається незалежна від всіх попередніх раундів копія R_k множини R і з непросіяних точок видаляються точки з номерами, що *не* лежать в R_k.

В роботі [6] з запропоновано та досліджено процедуру випадкового просіювання, в якій R є областю значень деякого випадкового блукання на $\mathbb{N}$. В згаданій роботі отримано такі результати:

- отримано граничні теореми для числа непросіяних точок, позицій непросіяних точок та числа раундів до просіювання перших M точок;
- отримано характеризацію стійких відносно просіювання випадковими блуканнями точкових процесів (поняття стійкості точкових процесів відносно просіювання запропоновано вперше).

7 Інші результати

Наведемо перелік найважливіших результатів з загальної теорії випадкових регенеративних структур, що були отримані в роботах циклу «Випадкові регенеративні структури» та не були згадані вище.

1. Запропоновано новий метод – метод ітеративних функцій – дослідження асимптотики моментів випадкових рекурсивних послідовностей [1,22]. З використанням

цього методу встановлено асимптотику моментів числа зіткнень X_n та часу поглинання τ_n, а також доведено слабку збіжність сумарного часу L_n життя всіх блоків у коалесценті Пуассона-Діріхле [1].

2. Доведено граничні теореми для низки функціоналів, що діють на збурених випадкових блуканнях. Зокрема,
   - встановлено функціональну граничну теорему для числа візитів збуреного випадково блукання в інтервал $[0, x]$, при $x \to \infty$, [5];
   - встановлено ряд граничних теорем для різниці між числом візитів в інтервал $[0, x]$ збуреним та звичайним випадковими блуканнями [23].
3. З використанням техніки ймовірнісних метрик, отримано достатні умови слабкої збіжності часу поглинання у спадних ланцюгах Маркова до стійких розподілів [7]. За допомогою отриманих результатів розв'язано низку відкритих проблем:
   - встановлено граничну теорему для числа злиттів у бета-коалесцентах без пилової компоненти [16];
   - отримано центральну граничну теорему для числа нульових декрементів у випадковому блуканні з бар'єром [17].
4. Доведено локальну універсальність для дійсних коренів тригонометричних поліномів [10].
5. Доведено збіжність моментів у граничних теоремах для процесів відновлення [9].
6. Отримано розклади Еджворта для розподілу Юенса [11].
7. З використанням симетрій процесу Пуассона в додатному квадранті, отримано ряд рівностей за розподілом, що пов'язують рівномірні та показникові випадкові величини [19].

Претендент на здобуття щорічної премії
Президента України для молодих учених О.В. Маринич