

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

«Сучасні методи алгебри і теорії чисел та їх застосування»
представлена на здобуття Державної премії в галузі
науки і техніки України за 2021 рік

ГРИГОРЧУК Ростислав Іванович – доктор фізико-математичних наук, професор, заслужений професор Техаського університету А&М (США), м. Техас, громадянин США.

ЖУЧОК Анатолій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, завідувач кафедри алгебри та системного аналізу Державного закладу «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка», м. Старобільськ.

ЖУЧОК Юрій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри та системного аналізу Державного закладу «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка», м. Старобільськ.

КУРДАЧЕНКО Леонід Андрійович – доктор фізико-математичних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, м. Дніпро.

ПЕТРАВЧУК Анатолій Петрович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ.

ПРАЦЬОВИТИЙ Микола Вікторович – доктор фізико-математичних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, декан Фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, м. Київ.

СИСАК Ярослав Прокопович – доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України, м. Київ.

ТОРБІН Григорій Мирославович – доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, професор кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, м. Київ.

Реферат
Київ – 2021

Робота «Сучасні методи алгебри і теорії чисел та їх застосування» містить результати досліджень, викладені у 16-ти монографіях і 841-й наукових статтях, які опубліковані протягом періоду 1973 – 2019 рр. В англomовних високорейтингових видавництвах опубліковано 9 монографій: Springer Verlag – 1, Birkhäuser – 3, World Scientific – 1, John Wiley&Sons – 3, Potsdam University Press – 1; інші 7 у видавництвах: Інституту математики НАН України – 4 (з яких 2 іноземною мовою), Наукова думка – 2, Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова – 1.

Найважливіші наукові праці авторів представленої роботи опубліковано у високорейтингових реферованих англomовних закордонних виданнях – це 355 статей. Крім того, 230 статті опубліковано у провідних наукових журналах України, 59 статей – у виданнях АН СРСР та Російської АН. Зазначені публікації забезпечили високий науковий рівень роботи та її цитованості:

- 2417 цитувань згідно з базою Scopus (h-індекс 20),
- 2259 цитувань згідно з базою Web of Science (h-індекс 21),
- 9576 цитувань згідно з базою Google Scholar (h-індекс 37).

Основною метою роботи є побудова нових ефективних методів та розвинення й вдосконалення існуючих підходів до задач загальної алгебри і теорії чисел, які мають різноманітні застосування в широкому спектрі проблем сучасної математики, зокрема у теоріях чисел, груп, напівгруп, допельнапівгруп, асоціативних кілець, модулів, алгебр Лі та Лейбніца, дімоноїдів і тріоїдів, фракталів, гіперграфів, геометрії, автоматів, формальних мов, алгоритмів, криптографії, функцій, ймовірностей та її додатків. Переважна більшість з цих методів виникла на шляху розв’язання цілої низки відомих світових математичних проблем, наприклад, таких як проблеми лауреатів премії Філдса Д. Мілнора про існування груп проміжного зросту між поліноміальним та експоненційним і М. Атьї про існування Ріманових мнoговидів з нецілим L^2 -числом Бетті, проблема фон Неймана-Дея про неелементарну аменабельність, проблема Арнольда-Крилова про узагальнення ергодичної теореми Біркоґофа, проблема Магнуса-Чандлера про існування нових класів майже нескінчених груп, гіпотеза Розенблатта про критерій супераменабельності групи, проблеми Кегеля про розв’язність суми двох нільпотентних алгебр Лі та наявність нерозв’язних лінійних груп, що є добутками 3-х попарно переставних нільпотентних підгруп, проблема Фройденбурга про нільпотентність деяких класів алгебр Лі диференціювань, проблема Кемхадзе про існування

непримарних локально скінченних груп, які є добутками двох своїх примарних підгрупгіпотеза Дженінгса-Красільнікова про еквівалентність лівої та групової метабелевості в радикальних кільцях, проблема Плоткіна про опис автоморфізмів напівгруп ендоморфізмів вільних алгебр, а також інших важливих проблем теорії алгебр Лейбніца, теорії алгебр Лі, теорії структур Лоде, теорії модулів над груповими кільцями, теорії факторизацій груп, тополого-метричної теорії дійсних чисел у різних системах їх кодування, фрактальної теорії дійсних чисел та її численних застосувань.

Для досягнення мети роботи було суттєво вдосконалено, значно розвинуто або узагальнено існуючі підходи до розв'язання алгебраїчних та теоретико-числових проблем, і розроблено та запропоновано нові сучасні методи алгебри і теорії чисел, а саме:

- запропоновано новий метод доведення того, що група не є супер аменабельною, який полягає в використанні введеного Григорчуком поняття парадоксального піддерева в графі Келі групи;
- побудовано контрприклад до сильної гіпотези М. Атьї та розроблено новий метод побудови многовидів з нецілими L^2 -числами Бетті;
- запропоновано комбінаторний метод вивчення обмежених когомологій й пораховано другу групу обмежених когомологій вільних груп та фундаментальних груп замкнутих орієнтованих поверхонь;
- розроблено нові методи вивчення спектрів операторів Лапласа та Маркова на графах й групах, і побудовано приклади графів Шрейєра з канторовським спектром та нескінчених груп з чисто точковим спектром;
- створено методи редукції спектральної проблеми на самоподібних графах до проблеми знаходження інваріантної множини багатовимірною раціонального відображення на Евклідовому просторі та до проблем, пов'язаних з випадковим оператором Шредингера;
- розвинуті методи використання теорії Чомського-Шютценберже формальних мов в теорії груп і навпаки, використання методів теорії груп в теорії формальних мов та теорії скінчених автоматів типу Мура-Мілі;
- розроблено нові методи дослідження груп, що діють автоморфізмами на корневих деревах, зокрема гіллястих та самоподібних груп;
- створено метод вивчення самоподібних блукань на самоподібних групах з використанням трюку, що отримав назву "Мюнхаузена трюк";

- розроблено метод використання теорії складності Колмогорова в теорії груп;
- запропоновано метод використання груп Григорчука та інших самоподібних груп в криптографії та суттєво розвинуто методи вивчення та побудови фракталів з допомогою груп;
- розроблені нові методи вивчення груп з обмеженнями на класи спряжених елементів, які дали можливість суттєвого проникнення у структуру таких груп, а також неперіодичних груп зі скінченими класами спряжених елементів;
- створені нові методи вивчення груп з обмеженнями, фактор – групи яких мають важливі фіксовані властивості, які базуються на побудові деяких типів модулів та вивчення їх будови;
- розроблені нові результативні методи вивчення груп зі слабкими умовами скінченності, нескінченно вимірних лінійних груп, а також модулів над груповими кільцями нескінчених груп;
- розроблені методи досліджень зв'язків факторів верхніх та нижніх центральних рядів та їх числових характеристик, які базуються на знаходженні прямих розкладів важливих типів модулів;
- розроблено теоретико-кільцеві методи дослідження узагальнено розв'язних груп з умовами скінченності та факторизаціями;
- на основі відомого поняття радикального кільця в сенсі Джекобсона, якщо його розглядати як модуль над своєю приєднаною групою, розвинуто більш загальну теорію радикальних модулів над групами;
- встановлено, що поняття радикального модуля збігається з поняттям брейса (brace), яке зв'язане з вивчення розв'язків відомого рівняння Янга-Бакстера, і до яких воно має пряме відношення;
- розроблено методи побудови добутків груп з заданими властивостями, в основі яких знаходиться поняття радикального модуля;
- розвинуто методи дослідження взаємозв'язків між груповою та лівою структурами в локальних та радикальних кільцях;
- узагальнено методи теорії алгебр Лі диференціювань областей цілісності, зокрема поліноміальних кілець над полями нульової характеристики;
- узагальнено методи дослідження сум алгебр Лі, близьких до нільпотентних;
- значно розвинуто теорію розв'язних і нільпотентних алгебр Лі диференціювань

(геометричною мовою – векторних полів) з застосуваннями в класифікаційних задачах рівнянь математичної фізики;

- значно розвинуто методи вивчення алгебр Лі, які складаються з локально нільпотентних диференціювань;
- застосовуючи метод занурення алгебр, доведено що будь-який дімоноїд міститься у якості піддімоноїда в деякому дімоноїді з бар-одинацями;
- запропоновано узагальнення класичних напівгрупових методів отримання вільних об'єктів на випадок дімоноїдів, тріоїдів та допельнапівгруп;
- розвиток методу декомпозиції дозволив дослідити структурні властивості дімоноїдів, тріоїдів та допельнапівгруп, використовуючи поняття сполуки напівгруп;
- узагальнено метод В. М. Усенка опису напівретракцій моноїдів, що дозволило розв'язати задачі характеристики низки конгруенцій на певних алгебрах Лоде;
- модифіковано метод Машевицького-Шайна опису автоморфізмів напівгруп ендоморфізмів вільних напівгруп та вільних моноїдів;
- узагальнено метод Зарецького опису зображень впорядкованих напівгруп бінарними відношеннями на випадок упорядкованих дімоноїдів та допельнапівгруп;
- розвинуто метод Бьотчера-Кнауера класифікації графів у термінах значень їх ендотипу відносно ланцюга включень різних видів ендотопізмів;
- розроблено загальні концептуальні основи теорії кодування (перекодування та декодування) дійсних чисел засобами різних алфавітів, створення її геометричної, тополого-метричної та ймовірнісної складових, обґрунтування нормальних властивостей чисел у різних системах зображення чисел;
- створено методологію аналітичного задання та дослідження локально складних неперервних мір та функцій (сингулярних, ніде не монотонних), що ґрунтується на широкому використанні різних систем зображення дійсних чисел та нових форм функціональних залежностей, їх структурних, варіаційних, автомодельних, інтегро-диференціальних властивостей, розподілів їх значень;
- узагальнено метод Біллінгслі довірчості системи покриттів при визначенні фрактальної розмірності, вдосконалено методи обчислення розмірності недосконалих фрактальних множин типу Безиковича-Егглстона;
- розроблено методику мультифрактального аналізу сингулярних ймовірнісних мір, зосереджених на фракталах з локально складною структурою;

- запропоновано груповий погляд на фрактальну геометрію як теорію інваріантів групи DP-перетворень простору;
- започатковано ґрунтовне вивчення сингулярних ніде не монотонних функцій.

Основні наукові результати, які отримано у представленій роботі:

- отримано революційні результати в теорії груп та областях її застосування: динамічних системах, абстрактному гармонійному аналізі, геометрії, топології, теорії зображень, теорії випадкових блукань, теорії графів, спектральній теорії на графах та групах, теорії формальних мов та скінчених автоматів, теорії когомологій, дискретній математиці, теорії фракталів, теорії алгоритмів та їх складності, криптографії;
- розроблена теорія груп проміжного росту між поліноміальним та експоненціальним (групи Григорчука), які мають численні застосування в математиці;
- показано, що клас аменабельних груп значно ширший за клас елементарно аменабельних груп, побудований фон Нейманом в 1929 році, що спричинило виникнення й розвинення теорії неелементарної аменабельності разом з новими методами доведення аменабельності груп та інших об'єктів;
- відкрито новий критерій аменабельності (Grigorchuk's criterion), який ґрунтується на комбінаторних властивостях групи та за допомогою якого побудовано ряд контрприкладів в теорії інваріантних середніх на групах;
- розв'язана проблема С. Прайда про нескінченні скінчено породжені групи у яких кожна власна фактор група скінченна, але не виконується умова максимальності для субнормальних підгруп;
- розв'язана проблема лауреата премії Філдса Ю. Зельманова про існування не класичних груп зі скінченною комутаторною шириною;
- введено поняття гіллястої групи і побудована теорія таких груп, в термінах яких, зокрема, доведена теорема про трихотомію в класі мінімально нескінченних груп та аналог цієї теореми для дещо іншого класу алгебр;
- введено поняття самоподібної групи і побудована теорія таких груп;
- введено поняття графу Келі алгебри Лі та побудовані приклади таких алгебр, що мають фрактальну природу;
- введено поняття повної та операторної функцій росту та доведено їх раціональність для важливого класу гіперболічних по Громову груп;

- розроблені базові основи теорії неперіодичних груп зі скінченними класами спряжених елементів;
- одержані важливі результати для груп з черніковськими та майже поліциклічними класами спряжених елементів, розпочато вивчення груп з мінімаксними класами спряжених елементів та їх узагальнень;
- отримані змістовні результати про вплив важливих типів підгруп нескінченних груп, які антагоністичні за своїми властивостями до нормальних, а також про вплив різних систем фактор-груп на будову всієї групи;
- одержані важливі результати про структуру груп різноманітних скінчених рангів, з'ясовано вплив на їх структуру важливих систем підгруп, зокрема системи абелевих підгруп;
- отримані змістовні результати про структуру груп з обмеженнями, пов'язаними з різноманітними рангами;
- одержані важливі результати про структуру груп зі слабкими умовами скінченності для важливих типів підгруп;
- розпочато дослідження нескінченно вимірних лінійних груп, запропоновано нові результативні підходи до вивчення будови таких груп;
- одержані важливі результати про будову модулів над груповими кільцями нескінченних груп;
- одержані нові результати про зв'язок факторів верхніх та нижніх центральних рядів, отримані відповідні числові інваріанти а також знайдені нові класи Шура для базових комутаторних слів;
- вперше побудовані приклади непримарних локально скінченних груп, які є добуткам двох своїх p -підгруп, що позитивно розв'язує проблему Кемхадзе;
- вперше побудовані приклади лінійних груп над полем, що є добутками трьох своїх попарно переставних абелевих підгруп, що дає позитивну відповідь на питання, поставлене Кегелем;
- отримана детальна класифікація груп, що є добутками двох своїх локально циклічних підгруп без скруту (проблема Сесекіна);
- доведено гіпотезу Дженінгса–Красільнікова про еквівалентність групової та лієвої метабелевості в локальних та радикальних кільцях;

- вперше побудовано нерозв'язну алгебру Лі, яка є сумою двох своїх нільпотентних підалгебр, що дає негативну відповідь на проблему О.Кегеля;
- вперше досліджено суми абелевої і нільпотентної алгебр Лі, отримано оцінки ступеня розв'язності в характеристиці нерівній 2;
- розроблено нові методи дослідження сум алгебр Лі, які близькі до нільпотентних, побудовано відповідне комутаторне числення;
- вперше отримано оцінки ступеня розв'язності алгебр Лі диференціювань областей цілісності над полями характеристики нуль;
- розроблено новий метод зведення класифікаційних задач із теорії алгебр Лі диференціювань до задач із теорії зображень;
- доведено, що задача класифікації скінченновимірних алгебр Лі векторних полів від чотирьох змінних є дикою;
- удосконалено методи вивчення алгебр Лі, які складаються із локально нільпотентних диференціювань, розв'язано проблему Фройденбурга для скінченновимірного випадку;
- з'ясовано будову циклічних й мінімальних алгебр Лейбніца, описані мінімальні алгебри Лейбніца, в яких кожна підалгебра є ідеалом, а також алгебри Лейбніца з умовою транзитивності для ідеалів;
- започатковано дослідження дімоноїдів (введених Ж.-Л. Лоде), тріоїдів (введених Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко) та допельнапівгруп (введених Б. Ріхтер);
- побудовано нові численні конструкції дімоноїдів, тріоїдів і допельнапівгруп та встановлено незалежність аксіом дімоноїдів і допельнапівгруп;
- запропоновано аналог теореми Келі в класі дімоноїдів та розроблено новий метод побудови дімоноїдів з використанням напівгрупової операції;
- для дімоноїдів, тріоїдів та допельнапівгруп розвинуто теорію многовидів, у якій центральну роль відіграє поняття вільного об'єкта;
- вперше отримано структурні теореми про будову деяких алгебр Лоде, зокрема, доведено, що довільний тріоїд (дімоноїд) є напівструктурою s -простих підтріоїдів (піддімоноїдів);
- розв'язано проблеми опису структурних властивостей напівгрупових конструкцій, зокрема, охарактеризовано групу автоморфізмів напівгрупи;

- розв'язано проблему Б. І. Плоткіна про опис автоморфізмів напівгруп ендоморфізмів вільних алгебр для многовиду комутативних дімоноїдів (g -дімоноїдів);
- розв'язано проблему визначеності деяких класів дімоноїдів, g -дімоноїдів та тріоїдів своїми напівгрупами ендоморфізмів;
- досліджено властивості напівгруп ендоморфізмів вільних моногенних дімоноїдів, комутативних дімоноїдів (комутативних g -дімоноїдів) та тріоїдів;
- уперше розпочато дослідження зображень упорядкованих дімоноїдів та спільно з Й. Коппіцом – упорядкованих допельнапівгруп бінарними відношеннями;
- побудовано універсальний об'єкт для 0 -категорійних інверсних напівгруп – симетричну інверсну 0 -категорію та досліджено різні її структурні властивості;
- описано та класифіковано з точністю до ізоморфізму всі зрізи симетричної інверсної 0 -категорії, що відповідають відношенням Гріна;
- вперше класифіковано відношення еквівалентності у термінах значень їх ендотипу відносно ендотопізмів, досліджено умови регулярності та корегулярності відповідностей напівгрупи ендоморфізмів еквівалентності;
- отримано зображення напівгруп ендоморфізмів заданих класів графів, гіперграфів, теоретико-напівгрупових конструкцій, відповідностей деяких напівгруп;
- узагальнено класичні теореми Е.Бореля (про нормальність чисел), Р.Салема (про сингулярність функції), П.Білінгслі (стосовно розмірності Гаусдорфа-Безиковича), Г.Мінковського (про сингулярність функції, означеної в термінах ланцюгових дробів), А.Безиковича (про фрактальну розмірність множин, визначених частотами використання цифр), Джессена-Вінтнера (про лебегівську чистоту ймовірнісної міри) та ін.;
- створено ряд нових двосимвольних систем кодування дійсних чисел, теорію ланцюгових A_2 -дробів;
- запропоновано тонку спектральну та мультифрактальну коасифікацію самоспряжених операторів з сингулярно неперервним спектром;
- описано топологічні, метричні та фрактальні властивості множин анормальних чисел, доведено ряд критеріїв аномальної фрактальності, суперфрактальності.

Наукові результати, представлені в роботі циклу, широко відомі провідним світовим фахівцям з теорії груп, теорії напівгруп, теорії алгебр Лі та алгебр Лейбніца, теорії фракталів. Результати роботи автори регулярно доповідали за кордоном на

численних міжнародних конференціях, наукових симпозиумах і математичних конгресах у Сполучених Штатах Америки, Японії, Великобританії, Канаді, Шотландії, Ізраїлі, Франції, Італії, Німеччині, Бельгії, Швеції, Туреччині, Португалії, Австрії, Іспанії, Швейцарії, Австралії, Новій Зеландії, Мексиці тощо. Використані у роботі методи та їх застосування привели до виникнення й розвинення нових напрямків в теорії груп – теорії самоподібних груп, теорії гіллястих груп, теорії груп ітерованої монодромії, теорії нескінченно вимірних лінійних груп, в універсальній алгебрі – теорії дімоноїдів, дігруп, тріоїдів, алгебр Лейбніца, в фрактальному аналізі – тополого-метричній теорії дійсних чисел у різних системах їх кодування та інших. За тематикою роботи захищено 12 докторських та 74 кандидатських дисертацій.

Перелік монографій та наукових публікацій, що увійшли до роботи, додається.

Заслужений професор Техаського університету А&М (США), доктор фізико-математичних наук, професор

Р.І. Григорчук

Заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор

А.В. Жучок

Доктор фізико-математичних наук, професор

Ю.В. Жучок

Заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор

Л.А. Курдаченко

Доктор фізико-математичних наук, професор

А.П. Петравчук

Заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник

М.В. Працьовитий

Доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник

Я.П. Сисак

Доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник

Г.М. Торбін