

Інститут математики НАН України, Київ
Наукова робота представлена на здобуття
премії Президента України для молодих вчених



Екстремальні проблеми і алгебраїчно-аналітичні методи комплексного та гіперкомплексного аналізу

Ірина Денега	д.ф.-м.н., старший науковий співробітник	h -індекс: 3 (Scopus)
Віталій Шпаківський	д.ф.-м.н., старший науковий співробітник	h -індекс: 6 (Scopus)
Богдан Клішук	к.ф.-м.н., науковий співробітник	h -індекс: 1 (Scopus)
Ярослав Заболотний	к.ф.-м.н., науковий співробітник	h -індекс: 3 (Scopus)

Метою роботи є розв'язання низки актуальних проблем сучасного комплексного аналізу, з акцентом на новітні тенденції та підходи в цій області математики.

Дана робота спрямована на розробку питань комплексного аналізу, теорії аналітичних функцій, теорії конформних відображень та їх узагальнень, екстремальних задач теорії аналітичних функцій, варіаційних, симетризаційних, екстремально-метричних методів аналізу та їх застосування до проблем геометричної і конструктивної теорії функцій, до багатовимірного комплексного аналізу, до крайових задач аналітичних функцій комплексної і гіперкомплексної змінної, дослідження диференціальних, локальних, асимптотичних і граничних властивостей, які задовольняють модульні оцінки.

Об'єкти дослідження – функціонали, які задані або на класах однолистих функцій, або на класах відкритих множин розширеної комплексної площини, плоскі і просторові відображення зі скінченим спотворенням, класи диференційовних функцій зі значеннями в асоціативних (комутативних і некомутативних) алгебрах і в нескінченновимірних топологічних векторних просторах.

Основні напрями досліджень:

– **Екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної** (П. Кьобе, Л. Бібербах, Т. Гронуолл, М. Шиффер, М.О. Лаврентьев, Г. Пойя, Г. Сегьо, Г. Грьотш, О. Тейхмюллер, Л. Альфорс, Г.М. Голузин, К. Льовнер, П.П. Куфарев, М.В. Келдиш, А. Шеффер, Д. Спенсер, Дж.А. Дженкінс, Н.А. Лебедев, В.К. Хейман, П.М. Тамразов, К. Померенке, З. Нехарі, Ю.Е. Аленіцин, І.Є. Базілевич, І.А. Александров, І.П. Мітюк, О.К. Бахтін, В.А. Шлик, К. Фітцджеральд, П. Дюрен, Е. Бомбьєрі, А. Бернстайн, К.І. Бабенко, В.Я. Гутлянський, С.Л. Крушкаль, В.Г. Шеретов, Г.В. Кузьміна, В.М. Дубінін, Д.В. Прохоров, А.Ю. Солинін, Є.Г. Ємельянов, А.Ю. Васильєв)

– **Теорія відображень** (Е. Бельтрамі, К. Гаус, Д. Гільберт, Ж. Ліувіль, А. Пуанкаре, Б. Ріман, Г. Шварц, К.Астала, Е. Вілламор, С. Водоп'янов, Ф. Герінг, Т. Іванець, П. Коскела, Дж. Манфреді, Дж. Мартін, О.Мартіо, Дж. Оннінен, У. Сребро, С. Хенкл, І. Холопаінен, Е. Якубов)

– **Аналітичні функції комплексної змінної** (В. Гамільтон, А. Келі, Дж. Гревс, В. Кліффорд і П. Тайта, Ч. Джолі, Ф. Хаусдорф, Г. Мойсіла, Н. Теодореско, Р. Фуетера, К. Кулліна, А. Садбері, Дж. Раяна, К. Гюрлебека і В. Шпрьоссіга, В. Кравченка й М. Шапіро, Г. Льюйтвілера, С. Бернштейн, Ф. Коломбо, І. Сабадіні, Д. Струш, П. Кетчум, Д. Вагнер, Дж. Ворд, Е. Лорх, Е. Блюм, М. Рошкулець, К. Кунц, І. П. Мельниченко, В. Ф. Ковальов, С.А. Плакса)

Актуальність напрямів дослідження

Екстремальні задачі на класах голоморфних функцій – це один із найважливіших напрямів геометричної теорії функцій комплексної змінної.

1934 М.О. Лаврентьев: $|f'_1(0)| \cdot |f'_2(0)| \leq |a_1 - a_2|^2$.

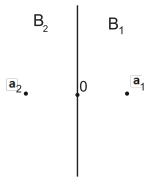
1951 Г.М. Голузин: $\prod_{k=1}^3 |f'_k(0)| \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \cdot |a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|$.

1997 Г.В. Кузьміна:

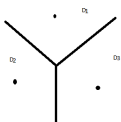
$$\prod_{k=1}^4 |f'_k(0)| \leq \frac{9}{4^3} (|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3| \cdot |a_1 - a_4| \cdot |a_2 - a_4| \cdot |a_3 - a_4|)^{\frac{2}{3}}$$

1998 В.М. Дубінін: $\prod_{k=1}^5 |f'_k(0)| \leq 4^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{25}{6}} \left(\prod_{1 \leq k < p \leq 5} |a_k - a_p| \right)^{\frac{1}{2}}$.

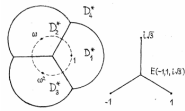
$n \geq 5 - ???$



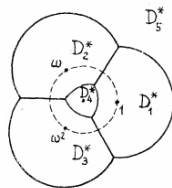
(a)



(b)



(c)



(d)

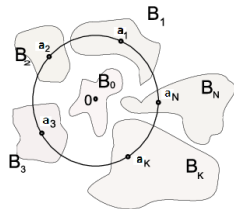
ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ З ВІЛЬНИМИ ПОЛЮСАМИ НА ОДИНИЧНОМУ КОЛІ

Проблема.

(В.М. Дубінін^а.) За всіх значень параметра $\gamma \in (0, n]$ показати, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, n \geq 2$, — області, що взаємно не перетинаються, в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0, |a_k| = 1, k = \overline{1, n}$, $r(B, a)$ — внутрішній радіус області B відносно точки a , досягається для конфігурації із областей B_k і точок a_k , які володіють n -кратною симетрією.



^аV.N.Dubinin. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory, Birkhuser/Springer, Basel, 2014, 344 p.

Теорема 1.^a

^aBakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 246, No. 1, P. 1–17.

Нехай $\gamma \in (1, 2]$. Тоді для довільних різних точок a_1 і a_2 одиничного кола і довільних областей, що взаємно не перетинаються, $B_0, B_1, B_2, a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}, a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq 4 \frac{\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{(1 - \frac{\gamma}{4})^{2 + \frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}} \right)^{2\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1}{2} |a_1 - a_2| \right)^{2-\gamma}. \quad (1)$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки a_0, a_1, a_2 і області B_0, B_1, B_2 є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2 - 1)^2} dw^2. \quad (2)$$

Зауваження 1.

Із теореми 1 випливає повний розв'язок проблеми для $n = 2$.

Теорема 2.^a

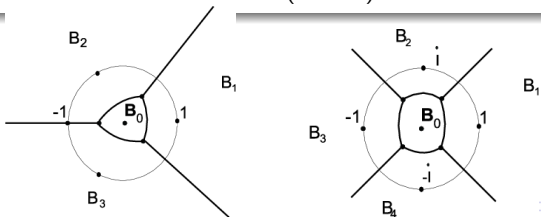
^aBakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles // Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 246, No. 1, P. 1–17.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ **одиничного кола** і будь-якого набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k), \quad (3)$$

де d_k, D_k , $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \quad (4)$$



Теорія відображень – це добре розвинена частина сучасного математичного аналізу. У цій теорії особливу увагу приділяють конформним відображенням, які знайшли численні важливі застосування у теорії уніформізації, теорії потенціалу, математичній фізиці, гідродинаміці, аеродинаміці, електростатиці й магнітостатиці.

1. квазіконформні відображення (Г. Греч, М.О. Лаврентьєв, Ч. Моррі);
2. відображення із обмеженим спотворенням за Решетняком (квазірегулярні відображення) (О. Мартіо, С. Рікман, Ю. Вайсяля);
3. відображення зі скінченим спотворенням за Іванцем, характеристики яких вже не є обмеженими в області визначення, а лише скінченими майже скрізь;
4. відображення із обмеженим інтегралом Діріхле (Г.Д. Суворов).

Актуальні проблеми:

встановлення мінімальних умов, достатніх для диференційовності відображень майже скрізь;
 встановлення оцінок спотворення міри множин і відстаней при відображеннях;
 дослідження локальної, асимптотичної і граничної поведінки відображень;
 застосування квазіконформних відображень і їхніх узагальнень до дослідження властивостей відображень зі класів Соболева й Орліча-Соболева.

Природним і напрочуд ефективним засобом дослідження плоских потенціальних полів є аналітичні функції комплексної змінної. Багатство цієї теорії й ефективність її застосувань у різних галузях науки спонукають математиків до розвитку подібних теорій у багатовимірних просторах.

Гіперкомплексний аналіз як узагальнення класичного комплексного аналізу на функції, що діють у багатовимірних алгебрах дозволяє будувати теорії, подібні до теорії аналітичних функцій комплексної змінної. Головний метод розвитку некомутативного гіперкомплексного аналізу базується на факторизації диференціальних операторів у вище зазначених алгебрах. На даний час відомі факторизації операторів Лапласа, Гельмгольца, Клейна-Гордона у алгебрах кватерніонів, антикватерніонів, бікомплексній та кліффордовій.

Некомутативний гіперкомплексний аналіз має два серйозні недоліки:

гіперголоморфні функції не утворюють функціональну алгебру, що обмежує можливості застосування даних гіперголоморфних функцій; не має чіткої і точної процедури побудови згаданих гіперголоморфних функцій. Природний шлях подолання цих труднощів некомутативного гіперкомплексного аналізу полягає у розгляді комутативних алгебр зі спеціальними базисами, що дають змогу будувати розв'язки заданих диференціальних рівнянь в частинних похідних у вигляді компонент моногенних функцій.

Цитування провідних науковців з даної тематики



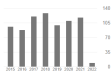
Vladimir Gutlyanskiy, В.Я. Гутлянский
 Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine
 Підтвержден адрес електронної пошти в домені iam.gov.ua
 Complex Analysis and PDE

Математика

Прочитовано ПРОСМОТРЕТЬ ВСЕ

Всё Начиная с 2017 г.

Статистика цитування
 h-індекс 21
 i10-індекс 30



НАЗВИЩЕ	ПРОЦИТОВАНО	ГОД
The Beltrami equation: a geometric approach V Gutlyanskiy, V Pivovarov, M Dzhalilov, S Yul'ichev Springer Science & Business Media	231	2012
On conformal dilatation in space G Birenko, V F Gol'dman, O Martio, M Vuorinen International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2003 (22 ...)	180	2003
On the degenerate Beltrami equation	93	2005



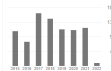
Vladimir Dubinin
 Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok
 Підтвержден адрес електронної пошти в домені iam.dv.ru
 Complex Analysis Polynomials Potential theory

Математика

Прочитовано ПРОСМОТРЕТЬ ВСЕ

Всё Начиная с 2017 г.

Статистика цитування
 h-індекс 21
 i10-індекс 36



НАЗВИЩЕ	ПРОЦИТОВАНО	ГОД
Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable V D Dubinin Russian Mathematical Surveys 43 (1), 1	229	1994
Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного ВН Дубинин Известия математического института 49 (1 (29)), 3-78	205	1994
Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory	142	2014



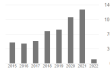
Toshiyuki Sugawa
 Professor, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
 Підтвержден адрес електронної пошти в домені math.is.tohoku.ac.jp - [Правильна статистика](#)
 Complex Analysis

Математика

Прочитовано ПРОСМОТРЕТЬ ВСЕ

Всё Начиная с 2017 г.

Статистика цитування
 h-індекс 10
 i10-індекс 30



НАЗВИЩЕ	ПРОЦИТОВАНО	ГОД
On the degenerate Beltrami equation V Gutlyanskiy, O Martio, T Sugawa, M Vuorinen Transactions of the American Mathematical Society 357 (3), 875-900	93	2005
A general approach to the Fekete-Szegő problem M Oshiki, Y Oishi, T Sugawa Journal of the Mathematical Society of Japan 59 (3), 703-727	66	2017
Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk	64	2002



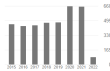
Matti Vuorinen
 Professor of Mathematics, University of Turku, Finland
 Підтвержден адрес електронної пошти в домені utu.fi - [Правильна статистика](#)
 Mathematics, geometric function theory, classical analysis

Математика

Прочитовано ПРОСМОТРЕТЬ ВСЕ

Всё Начиная с 2017 г.

Статистика цитування
 h-індекс 44
 i10-індекс 141



НАЗВИЩЕ	ПРОЦИТОВАНО	ГОД
CONFORMAL INVARIANTS, QUASICONFORMAL MAPS G O Aavola, MR Iwanami, M Vuorinen Canadian Mathematical Society, Monographs, John Wiley	749	1987
Conformal geometry and quasiregular mappings M Vuorinen Springer	600	2006
Generalized convexity and inequalities	380	2007

Основні результати роботи.

В роботах на базі новітніх фундаментальних досягнень у теорії функцій, комплексному аналізі та теорії відображень досліджено ряд актуальних проблем про екстремальне розбиття комплексної площини, знайдено нові підходи до розв'язання цих проблем і одержано ряд нових результатів у складних відкритих проблемах, над якими працюють математики в багатьох країнах світу. Отримані результати відкривають нові перспективи для подальшого дослідження цих проблем. Зокрема, в роботі отримано такі результати:

- розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів двох областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіуса області відносно початку координат при довільному $\gamma \in (0, 2]$ за умови, що всі три області попарно не перетинаються, й доведено узагальнення цього результату;
- одержано ефективні оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів на (n, m) -променевих системах точок комплексної площини як при будь-яких значеннях степеня $\gamma \in (0, nm]$ внутрішнього радіуса області, що містить нульову точку, так і для степеня $\gamma \in \mathbb{R}^+$ внутрішніх радіусів областей відносно початку координат і нескінченно віддаленої точки;

- отримано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на одиничному колі чи на довільній прямій, і в разі, коли області симетричні відносно одиничного кола; встановлено умови, за яких структура точок і областей неістотна; доведені оцінки функціоналів дозволили знайти сильніші результати в точних розв'язках відкритих екстремальних проблем про взаємно неперетинні області;
- отримано нижні оцінки об'єму образу кулі для гомеоморфних відображеннях відносно неконформного модуля в багатовимірному евклідовому просторі;
- досліджено поведінку на нескінченності кільцевих гомеоморфізмів відносно неконформного модуля;
- для регулярних гомеоморфних розв'язків класу Соболева $W_{loc}^{1,2}$ нелінійного рівняння Бельтрамі встановлено асимптотичні оцінки степеневого характеру в термінах нижньої границі. Отримано точні оцінки площі образу круга, та, як наслідок, отримано екстремальний аналог відомої леми Ікоми-Шварца. Побудовано розв'язки, на яких досягаються отримані оцінки. Знайдено достатні умови локальної гелдеровості та скінченної ліпшицевості регулярних гомеоморфних розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі;

- отримано представлення (конструктивний опис) моногенних функцій, визначених в областях спеціальних підпросторів довільної скінченновимірної комутативної асоціативної алгебри над полем \mathbb{C} , зі значеннями в цій алгебрі за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної;
- доведено аналоги інтегральних теорем (інтегральна теорема Коші для криволінійного і поверхневого інтегралів, інтегральна формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі;
- встановлено зв'язок між моногенними функціями зі значеннями в алгебрах, що утворюють послідовність розширень комутативних алгебр певного класу, й запропоновано підхід до побудови нескінченновимірних сімей розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами за допомогою вказаних моногенних функцій;
- доведено аналоги інтегральних теорем (теорема і формула Коші, теорема Морера) для моногенних функцій зі значеннями в нескінченновимірній комутативній алгебрі і топологічному векторному просторі з комутативним множенням, асоційованих із тривимірним рівнянням Лапласа;

- введено клас кватерніонних G -моногенних відображень і отримано їх представлення (конструктивний опис) за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної. Доведено аналогі інтегральних теорем для відображень цього класу;
- встановлено співвідношення між відомими класами кватерніонних диференційовних функцій і функцій, аналітичних за Хаусдорфом, а також встановлено зв'язок між відомими означеннями похідних і похідною за Хаусдорфом;
- розроблено метод побудови A_t -гіперголоморфних функцій, що належать ядру оператора Дірака, в узагальнених алгебрах Келі–Діксона;
- перенесено деякі з результатів, отриманих раніше для випадку комплексної площини, на випадок n -вимірною комплексного простору.

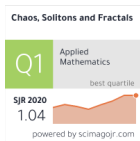
Робота складається з 94 наукових праць,

опублікованих у 2013–2020 роках, серед яких 62 статті у провідних вітчизняних та міжнародних фахових виданнях та 32 тез конференцій. У міжнародних журналах опубліковано 41 статтю, з яких 34 статті в англійськомовних журналах з імпаکت-фактором.

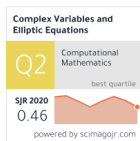
Усі публікації є реферованими.

У міжнародній наукометричній базі даних Google Scholar 274 цитувань, h-індекс = 11; у базі даних SCOPUS 34 публікації, 89 цитувань, h-індекс = 6; у базі даних Web of Science 18 публікацій, 40 цитувань, h-індекс = 4.

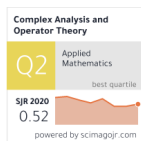
Видання, у яких опубліковані роботи, включені до циклу праць



(g)



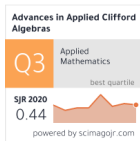
(h)



(i)



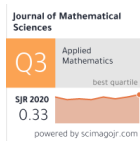
(j)



(k)



(l)



(m)



(n)

Вибрані виступи на конференціях, школах

- Hypercomplex Seminar 2016: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling vs. Special Ternary or Quaternary Nanostructures and Related Problems (30 years of the direct cooperation agreement Lodz – Paris VI), June 30 – July 7, 2016, Mathematical Conference Center at Bedlewo ([Poland](#));
- 9th Elgersburg School 2017 "Control theory of digitally networked dynamic systems, Optimal control techniques" , March 26 – April 1, 2017, Elgersburg ([Germany](#));
- Workshop "Young Women in Geometry" , April 3–5, 2017, Bonn ([Germany](#));
- Hypercomplex Seminar 2017: (Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling: Topology in Physics of Dynamical Systems and Molecular Nanoengines (30 years of the direct cooperation agreement Lodz [University and Lodz Society of Sciences and Arts] – Kyiv [National Academy of Sciences of Ukraine]), July 22–29, 2017, Mathematical Conference Center at Bedlewo ([Poland](#));
- World Meeting for Women in Mathematics, July 31, 2018, Rio de Janeiro ([Brazil](#));
- International Congress of Mathematicians, August 1–9, 2018, Rio de Janeiro ([Brazil](#));
- International Conference "Harmonic analysis and approximations" , September 16–22, 2018, Tsaghkadzor ([Armenia](#));

- 4th AMMODIT Conference, March 19–23, 2018, Malekhiv (Lviv region, [Ukraine](#));
- Hypercomplex Seminar 2018: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications, July 22 – July 29, 2018, Mathematical Conference Center at Bedlewo ([Poland](#));
- Hypercomplex Seminar 2019: (Hyper)Complex Analysis in Differential Equations, Geometry and Physical Applications (including (de)composition problems of binary up to senary structures in alloy and polymer physics), July 07 – July 14, 2019, Mathematical Conference Center at Bedlewo ([Poland](#));
- 10th ISAAC Congress, August 3–8, 2015 Macau ([China](#));
- 11th ISAAC Congress, August 14–18, 2017, Vaxjo ([Sweden](#));
- 12th ISAAC Congress, July 29 – August 2, 2019, Aveiro ([Portugal](#));
- Bogolyubov Kyiv Conference "Problems of theoretical and mathematical physics" , September 24–26, 2019, Kyiv ([Ukraine](#));
- International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications, December 14–16, 2019, New Delhi ([India](#));
- Two days International Webinar "Artificial Intelligence and Machine Learning" , Department of Computer Science, Baba Farid College, July 7–8, 2020, Bathinda ([India](#));
- Virtual Heidelberg Laureate Forum, September 21–25, 2020, Heidelberg ([Germany](#));
- International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Applications, Department of Mathematics, Dayanand Science College, July 27–29, 2020, Latur ([India](#)).



Рис.: International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications, South Asian University, New Delhi (India), 2019, Ірина Денєга

ДЯКУЄМО ЗА УВАГУ!